Übungsblatt 1

1 Funktionen

Definition 1 (Funktion)**.**

Eine **Funktion** $f(x)$ einer reellen Variable x mit **Definitionsbereich** D ist eine Regel, die jeder Zahl x in D eine reelle Zahl $f(x)$ **eindeutig** zuordnet. Die Menge der Werte $f(x)$ die man erhält wenn x im Definitionsbereich variiert, nennt man den **Wertebereich** von f.

1.1 Aufgabe zu Definitions- und Wertebereichen

Finden Sie die größtmöglichen Definitions- und Wertebereiche der folgenden Funktionen:

$$(i) \quad f(x) = \frac{1}{x+3} \qquad (ii) \quad g(x) = \sqrt{2x+4} \qquad (iii) \quad h(x) = ln(x) \qquad (iv) \quad i(x) = 1 - \sqrt{x+2}$$

1.2 Umkehrfunktionen

Definition 2 (Umkehrfunktion)**.**

$f(x)$ sei eine Funktion mit Definitionsbereich A und Wertebereich B. Wenn $f(x)$ niemals denselben Wert in zwei verschiedenen Punkten aus A einnimmt, ist die Funktion **eindeutig umkehrbar**. Sie hat eine **inverse Funktion** $f^{-1}(y)$ mit Definitionsbereich B und Wertebereich A. Die Funktion $f^{-1}(y)$ ist durch folgende Regel gegeben:
Für jedes $y \in B$ ist der Wert $f^{-1}(y)$ die eindeutig bestimmte Zahl $x \in A$ mit $f(x) = y$. Es gilt:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \quad (x \in A, y \in B)$$

1.3 Aufgabe zu Umkehrfunktionen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf und finden Sie die entsprechenden Umkehrfunktionen.

$$(i) \quad y = 4x - 3 \qquad (ii) \quad y = \sqrt[5]{x+1} \qquad (iii) \quad y = \frac{3x-1}{x+4}$$

2 Ableitungen

Definition 3 (Ableitung)**.**

Die Ableitung der differenzierbaren Funktion $f(x)$ im Punkt a, die mit $f'(a)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Geläufige Notationen für Ableitungen sind:

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$$

Ableitungsregeln 1.

Hier sind einige Ableitungsregeln die Sie für den Kurs brauchen werden:

1. Konstanten:
$$f(x) = c \implies f'(x) = 0$$
2. Summen:
$$f(x) = g(x) + h(x) \implies f'(x) = g'(x) + h'(x)$$
3. Potenzregel:
$$f(x) = x^a \implies f'(x) = ax^{a-1}$$
4. e-Funktion:
$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$
5. Logarithmus:
$$f(x) = ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$

2.1 Aufgabe zu einfachen Ableitungen

Berechnen Sie Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

$$(i) \quad y = x^4 - 3 \qquad (ii) \quad y = 9x^{10} \qquad (iii) \quad y = \tfrac{1}{x} \qquad (iv) \quad y = \sqrt{x}$$
$$(v) \quad y = x^{1/5} \qquad (vi) \quad y = e^x + x^2$$

Ableitungsregeln 2.

1. Produktregel:
$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \implies f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$
2. Quotientenregel:
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \implies f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$
3. Kettenregel:
$$f(x) = g(h(x)) \implies f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

2.2 Aufgabe zu Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel

Berechnen Sie:

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial x} x^2 e^x \qquad (ii) \quad \frac{\partial}{\partial a} \frac{3a-5}{a-2} \qquad (iii) \quad \frac{\partial}{\partial y} ln(y^4) \qquad (iv) \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{(u^2+u+1)^5}$$

3 Lokale Extrempunkte

Definition 4 (Lokale Extremwerte)**.**

Die Funktion f hat ein **lokales Minimum (Maximum)** an der Stelle c falls ein Intervall (a, b) um c herum existiert, so dass $f(x) \geq f(c)$ für alle x im Intervall (a, b) (bzw. $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in (a, b)$ für ein Maximum) .

Notwendige Bedingung für lokale Extrempunkte:
Kandidaten für lokale Maxima findet man an Stellen c für die gilt:

$$f'(c) = 0$$

Hinreichende Bedingung für lokale Extrempunkte: f sei eine zweimal ableitbare Funktion in einem Intervall (a, b) und c sei ein Punkt in (a, b). Dann gilt:

- $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0$ Bei $c, f(c)$ ist ein lokaler Maximalpunkt
- $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$ Bei $c, f(c)$ ist ein lokaler Minimalpunkt

3.1 Aufgabe zu lokalen Extrempunkten

Finden Sie die lokalen Minima und Maxima der folgenden Funktionen

$$(i) \quad f(x) = 5(x+2)^4 - 3 \qquad (ii) \quad h(x) = x^2 e^x \qquad (iii)^* \quad j(x) = x - \sqrt{x}$$

4 Globale Extrempunkte

Definition 5 (Globale Extrempunkte)**.**

Globale Extrema
Sofern eine Funktion f einen beschränkten Wertebereich hat, kann man häufig zusätzlich zu lokalen Extrema, globale Maximal- und Minimalpunkte bestimmen. Typische Kandidaten für solche Punkte sind lokale Extrema und Randpunkte des Definitionsbereiches von f.
Extremwertsatz:
Wenn f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ ist, so existiert ein Punkt $c \in [a, b]$, in dem f ein globales Minimum einnimmt und ein Punkt $d \in [a, b]$, in dem f ein globales Maximum einnimmt:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \qquad \text{für alle} \quad x \in [a, b]$$

4.1 Aufgabe zu globalen Extrempunkten

Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der folgenden Funktionen:

$$(i) \quad f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \quad \text{für} \quad x \in [0, 3] \qquad (ii) \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{für} \quad x \in [0, 2]$$

5 Ableitungen von Funktionen mit mehreren Variablen

Definition 6 (Partielle Ableitungen)**.**

Falls $z = f(x, y)$, dann bezeichnet $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x, wenn y konstant gehalten wird und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnet die Ableitung von $f(x, y)$ nach y, wenn wenn x konstant gehalten wird.

5.1 Aufgabe zu partiellen Ableitungen

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y, z) = xyz$ $\quad$ (ii) $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ $\quad$ $(iii)^*$ $h(x, y) = x^a y^b$ $\quad$ $(iv)^*$ $j(x, y) = 3x^2y^2 + e^x e^y$

6 Maximierung unter Nebenbedingung

Die Lagrange-Multiplikator Methode 1.

Um die einzig mögliche Lösung des Problems

$$\text{Maximiere (Minimiere)} \quad f(x, y) \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x, y) = c$$

zu finden, gehen Sie wie folgt vor:

1. Schreiben Sie die entsprechende Lagrange-Funktion für das Problem auf:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c]$$

2. Differenzieren Sie L nach x, y und λ und setzen Sie die erste Ableitung gleich 0 (Das sind die Bedingungen erster Ordnung für unseren Lagrange-Multiplikator Ansatz)

3. Die Gleichungen, die sich aus dem zweiten Schritt ergeben sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} &= g(x, y) - c = 0 \implies g(x, y) = c
\end{aligned}$$

4. Lösen Sie die drei Gleichungen gleichzeitig für alle 3 Unbekannten x, y und λ auf.

Achtung!
Die Lagrange-Multiplikator Methode eignet sich nicht für das Finden von Randlösungen. Zudem müssen die Zielfunktion und die Nebenbedingungen ableitbar sein.

6.1 Beispiel zur Lagrange-Multiplikator Methode

Hier ist nun ein Beispiel für eine typische Maximierung mit dem Lagrange-Multiplikator Ansatz, wie sie in diesem Kurs häufiger gebraucht wird. Ein Verbraucher habe eine Nutzenfunktion $U(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ und die Budgetbeschränkung $p_1x_1 + p_2x_2 = y$, wo bei A, a ,b, p_1, p_2 und y positive Konstanten sind. Dabei sind p_1 und p_2 die Preise der Güter x_1 und x_2 und y ist das verfügbare Einkommen des Verbrauchers. Bestimmen Sie den maximalen Nutzen unter der Budgetbeschränkung:

$$\max Ax_1^a x_2^b \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

Lösung:

1. Die Lagrange-Funktion zum Maximierungsproblem ist:

$$L(x, y, \lambda) = Ax_1^a x_2^b - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

2. Hier sind die Bedingungen erster Ordnung für das Problem:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = aAx_1^{a-1}x_2^b - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = bAx_1^a x_2^{b-1} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0$$

3. Auflösen der zwei ersten Gleichungen nach λ ergibt:

$$\lambda = \frac{aAx_1^{a-1}x_2^b}{p_1} = \frac{bAx_1^a x_2^{b-1}}{p_2} \implies \frac{ax_2}{p_1} = \frac{bx_1}{p_2}$$

4. Durch Einsetzen in die Budgetrestriktion erhalten wir die folgenden Nachfragefunktionen:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, y) = \frac{a}{a+b}\frac{y}{p_1} \quad \text{und} \quad x_2 = x_2(p_1, p_2, y) = \frac{b}{a+b}\frac{y}{p_2}$$

6.2 Aufgabe zum Lagrange-Multiplikator Ansatz

Betrachten Sie das folgende Maximierungsproblem:

$$\max\ xy \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad x + 3y = 24$$

(i) Verwenden Sie die Lagrange-Multiplikator-Methode um eine Lösung zu finden.

(ii) Überprüfen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Ergebnisse des oberen Beispiels.

(iii) Lösen Sie die Aufgabe durch Umstellen und Einsetzen der Nebenbedingung.

7 Grafik zu einer Funktion im R^3

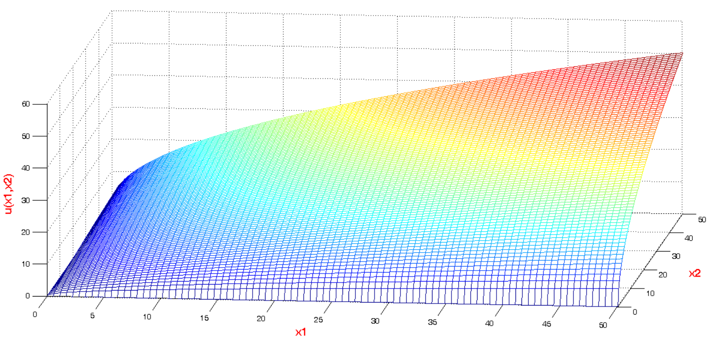

Abbildung 1: Eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion mit zwei Gütern

Literatur

[1] Sydsæter, K. und Hammond, P.J., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Basiswissen mit Praxisbezug.* Pearson Deutschland, 2009.