Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
Alfred-Weber-Institut für Wirtschaftswissenschaften

Prof. Dr. Zeno Enders
Lehrstuhl für Wirtschaftspolitik

Wirtschaftspolitik
- Lösung des Modells aus Kapitel 8 -

Dieses Dokument beschreibt die Lösung des Modells des achten Kapitels. Dafür kombinieren wir zunächst die relevanten Gleichungen auf der Nachfrageseite, um die sogenannte dynamische IS-Gleichung herzuleiten. Die Phillips-Kurve, die das firmenseitige Angebotsverhalten charakterisiert, hatten wir ja bereits ausgerechnet. Zusammen mit der Taylor Regel haben wir dann ein 3-Gleichungssystem, das die makroökonomischen Variablen des Modells in Periode 1 determiniert (in Periode 0 ist das System ja im Steady State, während sich in Periode 2 nur noch nominale Variablen bewegen, die realen gehen zurück zu ihrem Steady-State-Wert). Dieses können wir dann mit Hilfe bestimmter Techniken komplett lösen, d.h. die Reaktionen aller endogenen Variablen auf exogene Veränderungen bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

1 Nachfrage: die dynamische IS-Gleichung

Die Nachfrageseite kann mit Hilfe der dynamischen IS-Gleichung beschrieben werden. Die Nachfrage setzt sich, laut Ressourcenbeschränkung bzw. Markträumngsbedingung (9) aus dem Dokument „Kapitel 8b Berechnungen", $Y_t = G_t + C_t$, aus der Staatsnachfrage G_t und dem privaten Konsum C_t zusammen. Ersterer wird als exogen angenommen, letzterer wird durch die Eulergleichung (1) aus dem Dokument „Kapitel 8b Berechnungen" für Periode 1 bestimmt:

$$C_1 = \frac{C_2}{\beta r_1/\pi_2}.$$

Hier haben wir schon berücksichtigt, dass per Annahme keine weiteren Schocks in Periode 2 auftreten und die Akteure deswegen π_2 und C_2 bereits in Periode 1 kennen; der Erwartungswert fällt also weg. Zusammen erhalten wir also für Periode 1

$$Y_1 = G_1 + \frac{C_2}{\beta r_1/\pi_2}.$$

Damit wir nicht mit dem Niveau des BIPs rechnen müssen, sondern wie normalerweise üblich mit prozentualen Abweichungen, schreiben wir obige Formel etwas um. Und zwar teilen wir beide Seiten durch das Steady-State-Niveau Y vom BIP und ersetzen mit Hilfe der Ressourcenbeschränkung C_2 mit $Y_2 - G_2$

$$\frac{Y_1}{Y} = \frac{G_1}{Y} + \frac{Y_2 - G_2}{Y} \frac{1}{\beta r_1/\pi_2}.$$

In Periode 2 sind reale Variablen, da keine weiteren Schocks auftreten, wieder im Steady State, so dass $G_2 = G$ und $Y_2 = Y$. Zudem benennen wir Y_1/Y als $\hat{Y}_1$, G_1/Y als $\hat{G}_1$ und den Anteil der Staatsausgaben am BIP in Steady State G/Y als $\overline{G}$. Es ergibt sich die **dynamische IS-Gleichung (DIS)**[1]

$$\hat{Y}_1 = \hat{G}_1 + \frac{1 - \overline{G}}{\beta r_1/\pi_2}.$$

Hier sieht man, dass die gesamtwirtschaftliche Nachfrage, als Abweichung vom Steady State, positiv von der Staatsnachfrage und der (erwarteten, aber hier in Periode 1 bekannten) Inflation und negativ vom Nominalzins abhängt (d.h., die Nachfrage hängt ebenfalls negativ vom Realzins ab). Der Realzins wird mit $1 - \overline{G}$ multipliziert, da dieser nur den Konsum beeinflusst, weil die Staatsnachfrage als exogen angenommen wird.

[1] In der Neukeynesianischen Literatur wird statt der BIP-Abweichungen vom Steady State oft die Abweichungen von dem Wert verwendet, der mit flexiblen Preisen eintreten würden (dem sogenannten natürlichen BIP Niveau). Diese Abweichungen werden „Output Gap" genannt. Bei uns ist das BIP im Steady State gleich AL^α. Da, falls keine Friktionen vorliegen, per Annahme die Arbeitsstunden gleich L sind, ist das BIP ohne Friktionen in Periode 1 gleich $A_1 L^\alpha$ (unter der Annahme, dass die Technologie A_1 in Periode 1 vom Steady State abweichen kann; falls dies nicht der Fall ist fallen der Steady-State-Wert und der friktionslose Wert zusammen). Anhand dieser Gleichung kann man ausrechnen, dass der „Output Gap" gleich $(A_1/A)^{-\frac{1}{\alpha}}(Y_1/Y)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist.

2 Preissetzung: die Neukeynesianische Phillips-Kurve

Als nächstes betrachten wir das Firmenverhalten. Die Firmen steuern ihr Angebot über die Preissetzung. Die daraus resultierende Inflation für Periode 1 haben wir bereits im Dokument „Kapitel 8b Berechnungen" als Gleichung (2) hergeleitet:

$$\pi_1 = P_{Q,1} + P_{R,1} = MU \frac{W_0}{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}} Y_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1/2. \tag{1}$$

Im Steady State der Periode 0 haben wir den Preis der beiden Güter auf 1/2 normalisiert. Deswegen ergibt sich

$$P_{R,0} = P_{Q,0} = \frac{1}{2} = MU \frac{W_0}{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}}} Y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \tag{2}$$

wobei wir, im Gegensatz zu früher, zulassen, dass die Technologie A_1 in Periode 1 einen anderen Wert annimmt als im Steady State der Perioden 0 und 2. Damit können wir recht einfach die Auswirkungen von Technologieveränderungen auf die wirtschaftliche Entwicklugng betrachten. Wir teilen also die ganz linke Seite π_1 und den ganz rechten Term 1/2 von Gleichung (1) durch 1/2 und den Term mit dem $MU \ldots$ durch die rechte Seite der Gleichung (2):

$$\frac{\pi_1}{1/2} = \frac{1}{(A_1/A)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{Y_1}{Y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1.$$

Umgeschrieben erhalten wir eine Version der **Neukeynesianische Phillips-Kurve (NKPK)**[2]

$$\pi_1 = \left(\hat{A}_1^{-\frac{1}{\alpha}} \hat{Y}_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1\right)/2,$$

wobei A_1/A als $\hat{A}_1$ definiert ist. Wichtig ist hier nicht so sehr die spezifische Form der Gleichung, sondern die Determinanten der Inflation. Die Inflation hängt positiv von den Abweichung des BIP vom Steady State und negativ von der Abweichung der Technologie vom Steady State ab. Falls alle Variablen auf ihren Steady-State-Wert sind, erhalten wir auf der rechten Seite (1+1)/2=1, so dass $\pi_1 = 1$, also keine Inflation vorliegt.

3 Geldpolitik: die Taylor Regel

Die Geldpolitik wird, wie bisher, durch die Taylor Regel (TR) bestimmt, siehe Gleichung (6) aus dem Dokument „Kapitel 8b Berechnungen" für Periode 1:

$$r_1 = \pi_2^{\phi_\pi} \nu_1/\beta,$$

wobei wir hier wieder berücksichtigt haben, dass die Inflation in Periode 2 bereits heute vorhersehbar ist.

[2] Hier gilt auch wieder, dass die Neukeynesianischen Literatur statt den Abweichungen vom Steady State oft die Abweichungen von den Werten verwendet werden, die mit flexiblen Preisen eintreffen würden (siehe vorherige Fußnote). Außerdem beinhaltet die standardmäßige Neukeynesianischen Phillips-Kurve die erwartete zukünftige Inflation. Diese entfällt hier durch unsere Annahme, dass in Periode 2 keine weiteren Schocks auftreten.

4 Graphische Analyse

Wir erhalten also ein System aus drei Gleichungen mit den drei endogenen Variablen $\hat{Y}_1, \pi_1$, und r_t

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_1 &= \hat{G}_1 + \frac{1-\overline{G}}{\beta r_1/\pi_2} && (DIS)\\
\pi_1 &= \left(\hat{A}_1^{-\frac{1}{\alpha}} \hat{Y}_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1\right)/2 && (NKPK)\\
r_1 &= \pi_2^{\phi_\pi} \nu_1/\beta. && (TR)
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung können wir in die erste einsetzen:

$$\hat{Y}_1 = \hat{G}_1 + \frac{1-\overline{G}}{\pi_2^{\phi_\pi - 1}\nu_1}.$$

Die Inflation in Periode 2 ergibt sich, laut Gleichung (3) aus dem Dokument „Kapitel 8b Berechnungen", als

$$\pi_2 = 2 - \frac{1}{\pi_1} \tag{3}$$

und somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_1 &= \hat{G}_1 + \frac{1-\overline{G}}{\left(2-\frac{1}{\pi_1}\right)^{\phi_\pi - 1}\nu_1}\\
&= \hat{G}_1 + \left(1-\overline{G}\right)\left(2-\frac{1}{\pi_1}\right)^{1-\phi_\pi}/\nu_1.
\end{aligned}
$$

Das nachgefragte BIP hängt also, wenn man die geldpolitische Reaktion berücksichtigt, positiv von den Staatsausgaben $\hat{G}_1$, negativ vom geldpolitischen Schock ν_1 und negativ von der Inflation π_1 ab (zu beachten ist dabei, dass $1-\phi_\pi < 0$). Wenn man nach π_1 umstellt erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{Y}_1 - \hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1 &= \left(2-\frac{1}{\pi_1}\right)^{1-\phi_\pi}\\
\frac{1}{\pi_1} &= 2 - \left(\frac{\hat{Y}_1 - \hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1\right)^{\frac{1}{1-\phi_\pi}}\\
\pi_1 &= \left[2 - \left(\frac{\hat{Y}_1 - \hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1\right)^{\frac{1}{1-\phi_\pi}}\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Obige Gleichung können wir zusammen mit der Neukeynesianischen Phillips-Kurve (NKPK) in ein π_1-$\hat{Y}_1$ Koordinatensystem einzeichnen:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \left(\hat{A}_1^{-\frac{1}{\alpha}} \hat{Y}_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + 1\right)/2 && (NKPK)\\
\pi_1 &= \left[2 - \left(\frac{\hat{Y}_1 - \hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1\right)^{\frac{1}{1-\phi_\pi}}\right]^{-1}. && (DIS\ \&\ TR)
\end{aligned}
$$

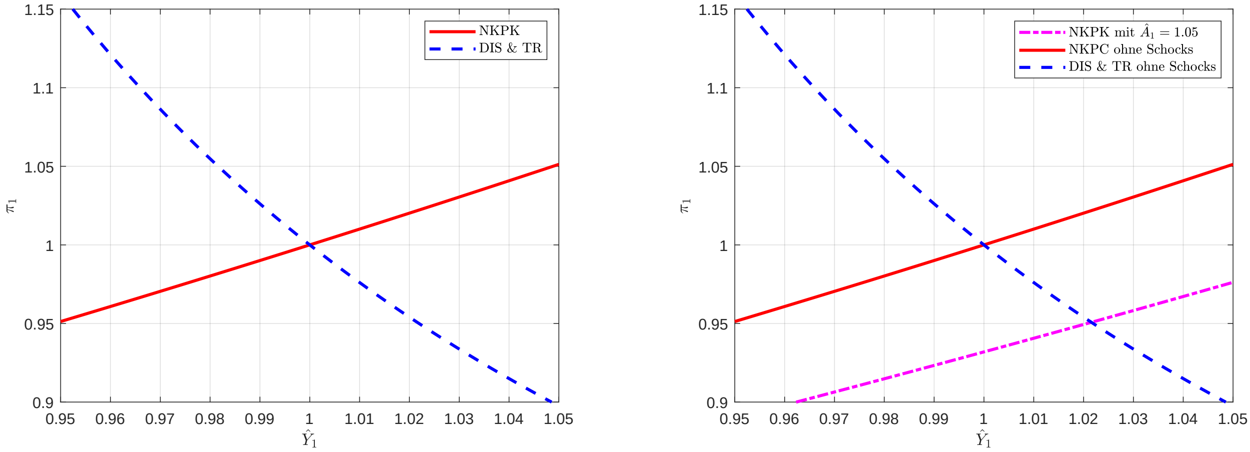

Abbildung 1: Links: NKPK und DIS & TR in Periode 1 ohne Schocks. Rechts: unerwartete Technologieverbesserung in Periode 1 um 5%.

Wir erhalten die linke Seite von Abbildung 1. Die rote Linie ist die Neukeynesianischen Phillips-Kurve, die blaue die dynamische IS-Gleichung, in die die Taylor Regel eingesetzt wurde. Die NKPK hat eine positive Steigung, da höhere Produktion ceteris paribus die Kosten steigert und somit Inflation verursacht. Die DIS & TR hat eine fallende Steigung, weil höhere Inflation eine überproportionale Zinserhöhung der Geldpolitik hervorruft, was den Realzins steigen lässt und somit die Nachfrage der privaten Haushalte senkt. Der Schnittpunkt ist bei $\hat{Y}_1 = \pi_1 = 1$, d.h. bei gleichbleibenden Preisen und dem Steady-State-Niveau des BIP.

Die Kurven veschieben sich bei Änderungen von exogenen Variablen. Die rechte Seite von Abbildung 1 zeigt exemplarisch eine Verbesserung der Technologie A_1 in Periode 1 um 5%. In Periode 2 sind exogene Variablen annahmegemäß wieder im alten Steady State, d.h. A_2 fällt zurück auf seinen Ausgangswert. Die rote Kurve zeigt die NKPK ohne diese Veränderunge, die magentafarbene Strichpunktkurve die NKPK mit der Technologieverbesserung. Für jedes Niveau von Produktion können die Firmen jetzt günstiger produzieren, so dass die Firmen, die ihre Preise setzen können, diese senken; die Inflation fällt. Die Geldpolitik reduziert laut Taylor Regel den Nominalzins soweit, dass der Realzins auch fällt. Die privaten Haushalte fragen deshalb in Einklang mit der Euler Gleichung mehr nach, so dass ein höheres BIP zustande kommt.

Die linke Seite von Abbildung 2 zeigt das Diagramm bei einem kontraktiven geldpolitischen Schock von 5%, d.h. $\nu_1 = 5\%$. Dies erhöht auch den Realzins, so dass weniger nachgefragt wird; die DIS & TR Kurve verschiebt sich nach links (gepunktete Kurve). Fallende Nachfrage führt zu geringeren Kosten bei den Firmen, weswegen im neuen Schnittpunkt mit der NKPK neben der dem niedrigeren BIP eine geringere Inflation vorherrscht. Die rechte Seite von Abbildung 2 stellt die Situation mit einer temporären Erhöhung der Staatsausgaben um 10% dar. Die Situation ist spiegelbildlich zur Zinserhöhung: die Nachfrage steigt, was die Kosten und somit die Inflation erhöht.

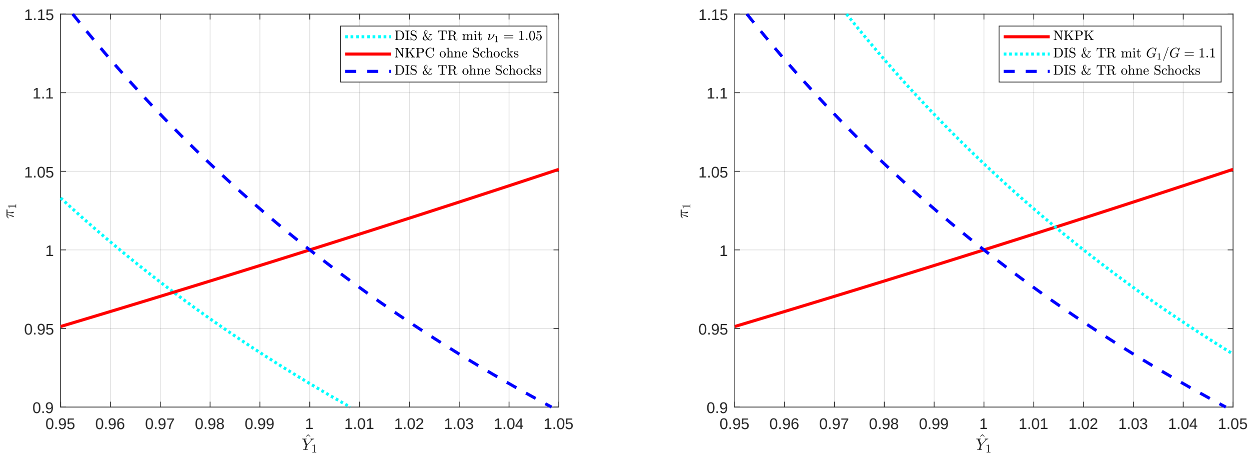

Abbildung 2: Links: kontraktiver geldpolitischer Schock von 5%. Rechts: unerwartete Staatsausgabenerhöhung um 10%

5 Mathematische Lösungen

Wir können aus den Gleichungen (NKPK) und (DIS & TR) auch die endogene Variabel π_1 raussubstituieren, indem wir beide Gleichungen gleich setzen:

$$\left(\hat{A}_1^{-\frac{1}{\alpha}}\hat{Y}_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+1\right)/2=\left[2-\left(\frac{\hat{Y}_1-\hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1\right)^{\frac{1}{1-\phi_\pi}}\right]^{-1}$$

bzw.

$$\left(\hat{A}_1^{-\frac{1}{\alpha}}\hat{Y}_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+1\right)\left[2-\left(\frac{\hat{Y}_1-\hat{G}_1}{1-\overline{G}}\nu_1\right)^{\frac{1}{1-\phi_\pi}}\right]=2. \tag{4}$$

Dies ist also eine Gleichung mit einer (endogenen) Unbekannten: $\hat{Y}_1$ (die anderen Variablen sind exogen und können von uns je nach zu untersuchenden Szenario frei gesetzt werden). Aufgrund unserer Annahme, dass keine weiteren Schocks in Periode 2 auftreten, konnten wir Konsum und Inflation in Periode 2 in den entsprechenden Gleichungen mit Steady-State Ausdrücken oder Variablen aus Periode 1 ersetzen. Somit haben wir keine dynamischen Aspekte in dieser Gleichung. Alle Variablen beziehen sich entweder auf Periode 1 oder auf den Steady State. Dies ist anders als in standardmäßigen Neukeynesianischen Modellen, in denen Dynamik berücksichtigt wird. Trotzdem stellt sich hier aufgrund der Nicht-Linearität der Gleichung dasselbe Problem wie schon bei der Lösung des statischen Problems in dem Dokument „Kapitel 2 Berechnungen". Es gibt also wiederum drei mögliche Vorgehensweisen:

1. *Analyse von Spezialfällen.* Wir werden unten den Fall $\alpha = 1/2$ und $\phi_\pi = 2$ betrachten, da wir für diese Parameterkonstellation die Gleichung lösen können. Es ist dann allerdings immer fraglich, ob die so erzielten Ergebnisse auch für andere Parameterwerte halten.

2. *Lineare Approximierung.* Man kann die nichtlinearen Funktionen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung linear approximieren, d.h. man leitet (lineare) Gleichungen für zwei Geraden her, die durch einen bestimmten Punkt dieser Funktionen gehen (man setzt also bestimmte Variablenwerte ein, meist die vom Steady State, um zu diesem

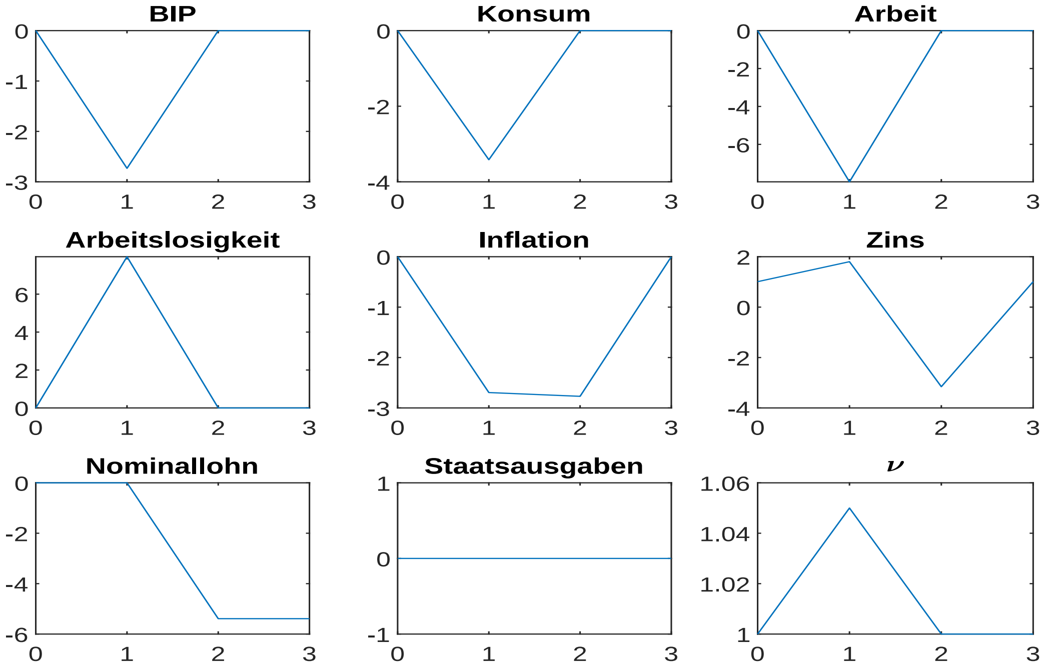

Abbildung 3: Impuls-Antwort-Folgen nach einem geldpolitischen Schock von 5%.

bestimmten Punkt zu gelangen). Mit Hilfe dieser Geraden kann die so approximierte Gleichung analytisch gelöst werden. Diese Näherungen sind allerdings jeweils nur nah um den Approximationspunkt herum valide. Falls das System sich weiter von diesem Punkt weg bewegt, werden die Aussagen ungenauer.

3. *Numerische Lösungen.* Wenn man für die Paramter bestimmte Werte einsetzt, kann ein Computer diese Gleichung lösen. Man muss dann aber überprüfen, ob die so erlangten Aussagen auch für andere Parameterwerte zutreffen.

Zunächst können wir, wie in Kapitel 2, aber einige grobe Abschätzungen vornehmen: die linke Seite der obigen Gleichung (4) hängt positiv von $\hat{Y}_1$ ab (hier sei wieder zu bemerken, dass $1 - \phi_\pi < 0$), sowie negativ von $\hat{A}_1$, positiv von ν_1 und negativ von $\hat{G}_1$. Also hängt $\hat{Y}_1$ positiv von $\hat{A}_1$, negativ von ν_1 und positiv von $\hat{G}_1$ ab. Für eine quantitative Lösung werden wir die erste und die letzte Variante der oben aufgelisteten Möglichkeit verwenden.

5.1 Analyse eines Spezialfalls

Als Spezialfall bietet sich $\alpha = 1/2$ und $\phi_\pi = 2$ an. Wenn wir diese Werte in Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
2 &= \left(\hat{A}_1^{-2}\hat{Y}_1 + 1\right)\left[2 - \left(\frac{1-\overline{G}}{\hat{Y}_1 - \hat{G}_1}\right)/\nu_1\right] \\
2(\hat{Y}_1 - \hat{G}_1) &= \left(\hat{A}_1^{-2}\hat{Y}_1 + 1\right) 2(\hat{Y}_1 - \hat{G}_1) - \left(\hat{A}_1^{-2}\hat{Y}_1 + 1\right)\left(1-\overline{G}\right)/\nu_1 \\
0 &= \hat{Y}_1^2 2\hat{A}_1^{-2} + \hat{Y}_1\left[-2\hat{G}_1 - \left(1-\overline{G}\right)/\nu_1\right]\hat{A}_1^{-2} - \left(1-\overline{G}\right)/\nu_1
\end{aligned}$$

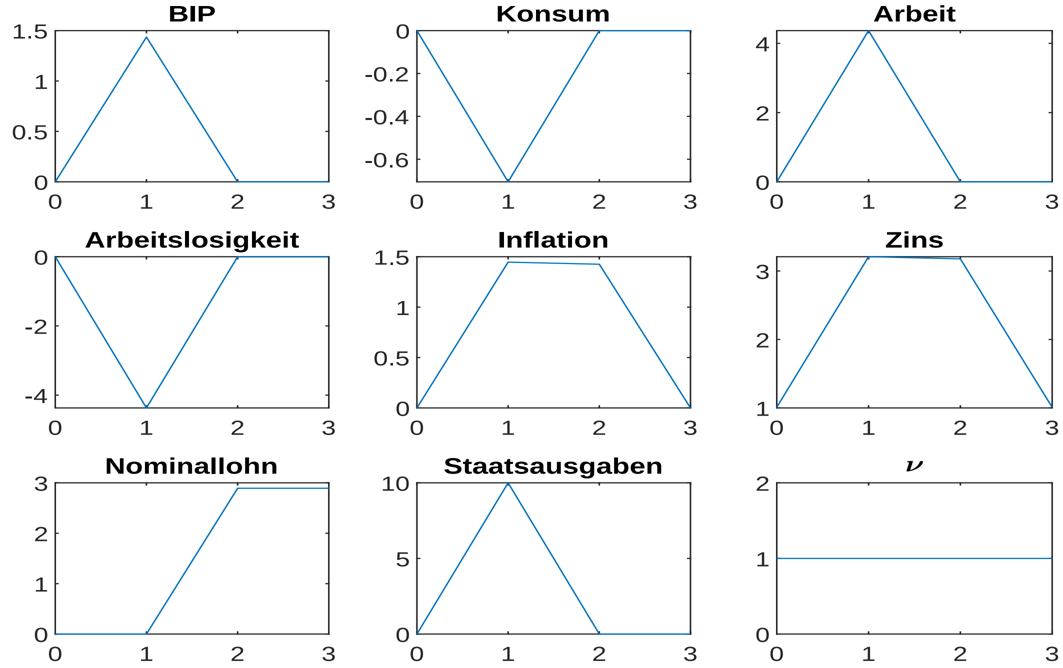

Abbildung 4: Impuls-Antwort-Folgen nach einer Staatsausgabenerhöhung um 10%.

$$
\begin{aligned}
0 =& \hat{Y}_{1,1/2}^2 - \hat{Y}_1 \left[\hat{G}_1 + \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)\right] - \hat{A}_1^2 \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1) \\
\Rightarrow \hat{Y}_1 =& \left[\hat{G}_1 + \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)\right]/2 \pm \sqrt{\left[\hat{G}_1 + \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)\right]^2/4 + \hat{A}_1^2 \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)}.
\end{aligned}
$$

Da der Fall mit dem Minus-Zeichen vor der Wurzel negative Werte für $\hat{Y}_1$ ergibt, das BIP aber keine negativen Werte annehmen kann, können wir diese Lösung verwerfen. Es bleibt

$$
\hat{Y}_1 = \left[\hat{G}_1 + \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)\right]/2 + \sqrt{\left[\hat{G}_1 + \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)\right]^2/4 + \hat{A}_1^2 \left(1 - \overline{G}\right)/(2\nu_1)}.
$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir unsere obigen Abschätzungen bestätigen: $\hat{Y}_1$ ist eine Funktion, die positiv von $\hat{A}_1$ und $\hat{G}_1$ sowie negativ von ν_1 abhängt. Die Stärke der Reaktion auf einen geldpolitischen Schock ν_1 hängt dabei invers von der Staatsquote $\overline{G}$ ab. Mit dieser Lösung für den Spezialfall kann man mit Hilfe von anderen bisher verwendeten Gleichungen für alle endogenen Variablen lösen.

5.2 Numerische Lösung

Mit Hilfe eines Computercodes wird Gleichung (4) numerisch für die Werte $\alpha = 1/3$, $\overline{G} = 0,2$ und $\phi_\pi = 1,5$ gelöst (dies sind alles empirisch plausible Werte). Das heißt, wir berechnen die Schnittpunkte in den obigen Koordinatensystemen. Wenn man die Informationen hinzunimmt, dass wir uns in Periode 0 in alten Steady State befinden, dass die realen Variablen ab Periode 2 wieder zu diesem alten Steady State zurückkehren und dass sich die Inflation in Periode 2 mit der Gleichung (3) und der Zins mit Hilfe der Taylor Regel bestimmen lassen, dann können wir auch Impuls-Antwort-Folgen auf diverse Schocks generieren.

Abbildung 3 zeigt die Reaktionen der makroökonomischen Zeitreihen nach einem unerwarteten kontraktiven geldpolitischen Schock von 5% in Periode 1 (also einer Zinserhöhung). Auf der X-Achse sind die Perioden abgetragen, auf der Y-Achse die Abweichungen vom Steady State in Prozent, außer Arbeitslosigkeit (Abweichungen der Arbeitsstunden vom Zielwert in Prozent), Zins und ν (in Prozentpunkten). Wie wir sehen, löst die Zinserhöhung eine Rezession aus. Dabei steigt der Zins weniger als die 5% des Schocks, da er laut Taylor Regel auch noch endogen auf die (gesunkene) Inflation reagiert. In Periode 2 ist $\nu_2 = 0$ und es liegt nur noch die endogene Reaktion auf die Inflation vor. Da diese gefallen ist, fällt der Zins theoretisch unter 0%. In der Realität ist dies nicht möglich, man kann diese negativen Werte jedoch als Anleihekäufe seitens der Zentralbank interpretieren.

Abbildung 4 zeigt die Reaktionen der makroökonomischen Zeitreihen nach einer unerwarteten Staatsausgabenerhöhung um 10% in Periode 1. Dies senkt aufgrund der höheren Steuern und somit des Einkommeneffekts den Konsum, erhöht aber wegen der gestiegenen Gesamtnachfragen das BIP und die geleisteten Arbeitsstunden. Die Arbeitslosigkeit wird von daher negativ, was wir als Überstunden interpretieren. Die Kosten der Produktion und damit einhergehend die Inflation steigen. Die Zentralbank reagiert mit einer Zinserhöhung. Die Inflation ist aufgrund der Inflationspersistenz auch in Periode 2 noch positiv. Deswegen ist auch der Zins in Periode 2 noch über seinem Steady-State-Wert.