Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
Alfred-Weber-Institut für Wirtschaftswissenschaften

Prof. Dr. Zeno Enders
Lehrstuhl für Wirtschaftspolitik

Wirtschaftspolitik
- Modellerweiterungen in Kapitel 3 -

Dieses Dokument leitet die Modellerweiterungen aus Kapitel 3 her. Weitere Erläuterungen zu den Modellen und den Annahmen finden Sie auf den Folien.

Inhaltsverzeichnis

1 Produktionsexternalitäten

- Wie im Grundmodell zwei symmetrische Unternehmen, aber mit externen Effekten
- Wie im Grundmodell ein repräsentativer Haushalt (Haushalt und Konsument bezeichnen hier dieselbe Einheit)
- Vereinfachende Annahme: $\gamma = \alpha = 1$

Der Unterschied zum Grundmodell sind die Produktionsfunktionen für die beiden Güter:

$$Q = AL_Q + \nu L_R$$
$$R = AL_R + \nu L_Q$$

mit $\nu > -1$.

1.1 Dezentrale Lösung

1.1.1 Unternehmen

Firma Q nimmt die Aktivitäten von R als gegeben an (und umgekehrt). Gewinnmaximierung am Beispiel Q:

$$\begin{aligned} \Pi_Q &= PQ - WL_Q \\ &= P\left(AL_Q + \nu L_R\right) - WL_Q. \end{aligned}$$

Die Gewinnmaximierung führt zu

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_Q}{dL_Q} &= PA - W = 0 \\ A &= \frac{W}{P}. \end{aligned}$$

Dies ist die (implizite) Arbeitsnachfrage. Da die Firmen die Aktivitäten der anderen Firma als gegeben annehmen, ist das Ergebnis wie im Grundmodell: Der Reallohn (W/P) ist gleich dem Grenzprodukt (A).

1.1.2 Haushalt

Das Problem des Haushalts ist unverändert:

$$\mathcal{L} = u\left(C, L_Q, L_R\right) - \lambda\left(PC - WL_Q - WL_R - \Pi\right)$$

mit der Nutzenfunktion

$$u = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2 \quad \text{mit } \sigma > 0 \text{ und } L > 0.$$

Somit sind auch die Bedingungen erster Ordnung (BEO) sind wie im Grundmodell:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\partial u}{\partial C} - \lambda P = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_Q} = \frac{\partial u}{\partial L_Q} + \lambda W = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_R} = \frac{\partial u}{\partial L_R} + \lambda W = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = PC - WL - \Pi = 0.$$

Wegen der zweiten und dritten BEO gilt $\partial u/dL_Q = \partial u/dL_R = \partial u/dL$ und somit ergibt sich, nach Ersetzen des Lagrange Multiplikators durch die erste BEO

$$\frac{W}{P} = \frac{\Psi L}{C^{-\sigma}} = \frac{-\partial u/\partial L}{\partial u/\partial C}.$$

Dieses ist wieder das bekannte Ergebnis, dass das Grenzleid von Arbeit (ΨL) gleich dem Reallohn (W/P) mal dem Grenznutzen von Konsum ($C^{-\sigma}$) sein muss, bzw. das Verhältnis des Grenzleids von Arbeit zum Grenznutzen von Konsum gleich dem Reallohn.

1.1.3 Gleichgewicht

Im Gleichgewicht gilt

$$A = \frac{W}{P} = \frac{\Psi L}{C^{-\sigma}} = \frac{-\partial u/\partial L}{\partial u/\partial C},$$

d.h. das Verhältnis des Grenzleids von Arbeit zum Grenznutzen von Konsum ist gleich der Grenzrate der Transformation, wie in den Beschreibungen des Grundmodells diskutiert wurde. Wichtig ist hierbei, dass diese (private) Grenzrate der Transformation die einer einzelnen Firma ist, also wie eine Firma Arbeit in Konsum „verwandeln” kann.

1.2 Sozialer Planer

In dem Maximierungsproblem des sozialen Planers werden die Externalitäten berücksichtigt:

$$\mathcal{L} = u\left(C, L_Q, L_R\right) - \lambda\left(C - AL_R - \nu AL_Q - AL_Q - \nu AL_R\right).$$

Die Bedingungen erster Ordnung sind:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\partial u}{\partial C} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_Q} = \frac{\partial u}{\partial L_Q} - \lambda\left(-\nu A - A\right) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_R} = \frac{\partial u}{\partial L_R} - \lambda\left(-\nu A - A\right) = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C - AL_R - \nu AL_Q - AL_Q - \nu AL_R = 0$$

und somit (unter Berücksichtigung von $L = L_Q + L_R$)

$$\frac{\partial u}{\partial L_Q} = \frac{\partial u}{\partial L_R} = \frac{\partial u}{\partial L} = -\lambda A\,(1+\nu) = -\frac{\partial u}{\partial C} A\,(1+\nu)$$
$$\rightarrow \frac{-\partial u/\partial L}{\partial u/\partial C} = A\,(1+\nu)\,.$$

Zum Vergleich: die Marktlösung ergab: $\frac{-\partial u/\partial L}{\partial u/\partial C} = \frac{W}{P} = A$. Hier fallen die (dezentrale) Marktallokation und die Allokation des sozialen Planers auseinander. Der Unterschied liegt in der Grenzrate der Transformation: in der dezentralen Lösung entspricht das Verhältnis des Grenzleids von Arbeit zum Grenznutzen von Konsum der private Grenzrate der Transformation (einer Firma), in der Lösung des sozialen Planers entspricht dieses Verhältnis der gesellschaftlichen Grenzrate der Transformation. Diese berücksichtigt, dass die Produktion einer Firma die Produktion der anderen Firma schmälert, sie sagt also aus, wie die Gesellschaft eine Einheit Arbeit in Konsumgüter transformieren kann.

Auf den Folien werden auch die gesellschaftlichen Grenzkosten erwähnt. Damit sind die Kosten zur Herstellung einer Einheit des Gutes gemeint, wenn man die Auswirkungen dieser Produktion auf die andere Firma berücksichtigt. Diese sind also der Lohn W/P, den eine Arbeiterin oder ein Arbeiter für eine Stunde erhält (nicht in Euro, sondern durch die Division durch P ausgedrückt in Gütern), geteilt durch das gesellschaftliche Grenzprodukt. Dieses entspricht der Ableitung der Summe der beiden Produktionsfunktionen $AL_R + \nu AL_Q + AL_Q + \nu AL_R = AL + \nu AL$ nach L, also $A + A\nu$. Dies ist auch die gesellschaftliche Grenzrate der Transformation. Die gesellschaftlichen Grenzkosten sind somit

$$\frac{W/P}{A(1+\nu)}.$$

2 Konsumexternalitäten

- Zur Vereinfachung nur ein Unternehmen, das wie eines der beiden Unternehmen im Grundmodell produziert
- Zwei symmetrische Haushalte, mit Externalitäten des Konsums auf den Nutzen des anderen Haushalt
- Vereinfachende Annahmen: $\gamma = \alpha = 1$

Der Hauptunterschied zum Grundmodell ist die Nutzenfunktion der beiden Haushalte.

2.1 Dezentrale Lösung

2.1.1 Haushalt

Der Konsum eines Haushalts hat per Annahme Auswirkungen auf den Konsum des anderen Haushalts

$$u_a = \frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_a^2 + \nu C_b$$
$$u_b = \frac{C_b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_b^2 + \nu C_a.$$

Das Maximierungsproblem für Haushalt a (symmetrisch für Haushalt b) ist daher

$$\mathcal{L} = \frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_a^2 + \nu C_b - \lambda\left(PC - WL - \Pi\right).$$

Da Haushalt a den Konsum von Haushalt b als gegeben betrachtet, und dieser additiv in den Nutzen von Haushalt a eingeht, sind die Bedingungen erster Ordnung beider Haushalte (d.h. ihr Verhalten) so wie des einzelnen Haushalts im Grundmodell.

2.1.2 Unternehmen

Die Produktionsfunktion der Firma ist

$$Y = AL = A(L_a + L_b).$$

Ihr Gewinnmaximierungsproblem ist somit

$$\Pi = PY - W(L_a + L_b)$$
$$= PA(L_a + L_b) - W(L_a + L_b).$$

Dies führt zu dem altbekannten Ergebnis

$$\frac{W}{P} = A.$$

2.1.3 Gleichgewicht

Wir erhalten, ähnlich wie oben, nur mit zwei symmetrischen Haushalten

$$A = \frac{W}{P} = \frac{\Psi L_a}{C_a^{-\sigma}} = \frac{\Psi L_b}{C_b^{-\sigma}} = \frac{-\partial u_a/\partial L_a}{\partial u_a/\partial C_a} = \frac{-\partial u_b/\partial L_b}{\partial u_b/\partial C_b}.$$

Wieder ist das Verhältnis des Grenzleids von Arbeit zum (privaten) Grenznutzen von Konsum eines Haushalts gleich der Grenzrate der Transformation (A).

2.2 Sozialer Planer

Der soziale Planer berücksichtigt die Externalitäten. Das Problem des sozialen Planers ist somit

$$\max_{C_a,C_b,L_a,L_b} \left(\frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2} L_a^2 + \nu C_b \right) + \left(\frac{C_b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2} L_b^2 + \nu C_a \right)$$

unter der Nebenbedingung der Ressourcenbeschränkung

$$C_a + C_b - A\left(L_a + L_b\right).$$

Als Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2} L_a^2 + \nu C_b + \frac{C_b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2} L_b^2 + \nu C_a - \lambda \left[C_a + C_b - A\left(L_a + L_b\right) \right].$$

Die Bedingungen erster Ordnung ergeben sich als

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_a} &= C_a^{-\sigma} + \nu - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_b} &= C_b^{-\sigma} + \nu - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_a} &= -\Psi L_a + \lambda A = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_b} &= -\Psi L_b + \lambda A = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= C_a + C_b - A\left(L_a + L_b\right).
\end{aligned}$$

Umschreiben ergibt

$$\begin{aligned}
\Psi L_a &= \Psi L_b = \lambda A \\
C_a^{-\sigma} + \nu &= C_b^{-\sigma} + \nu = \lambda \\
\frac{\Psi L_i}{A} &= C_i^{-\sigma} + \nu \text{ für } i = a, b \\
C_a + C_b &= A\left(L_a + L_b\right) = AL.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$A = \frac{\Psi L_a}{C_a^{-\sigma} + \nu} = \frac{\Psi L_b}{C_b^{-\sigma} + \nu} = \frac{-\partial u_a / \partial L_a}{\partial u_a / \partial C_a} = \frac{-\partial u_b / \partial L_b}{\partial u_b / \partial C_b}.$$

Solange $\nu \neq 0$ fallen die (dezentrale) Marktlösung und die Lösung des sozialen Planers auseinander. Hier liegt der Unterschied in dem Verhältnis der Verhältnis des Grenzleids von Arbeit zum Grenznutzen von Konsum, das gleich der Grenzrate der Transformation ist. Und zwar wird hier nicht der private Grenznutzen von Konsum verwendet, sondern der gesellschaftliche. Wenn $\nu \neq 0$, dann liegt dieser aufgrund der Externalität über ($\nu > 0$) oder unter ($\nu < 0$) dem privaten (eines einzelnen Haushaltes).