Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
Alfred-Weber-Institut für Wirtschaftswissenschaften

Prof. Dr. Zeno Enders
Lehrstuhl für Wirtschaftspolitik

Wirtschaftspolitik
- Grundmodell aus Kapitel 2 -

Dieses Dokument leitet das auf den Folien beschriebene Modell im Detail her. Abweichend von der Vorlesung beginnen wir hier mit einem vereinfachten Grundmodell, welches wir anschließend zum Grundmodell erweitern. Das erweiterte Modell entspricht dem Modell aus Kapitel 2 der Vorlesung. In den Kästen stehen Kommentare oder Erklärungen. Weitere Erläuterungen zum Modell und den Annahmen finden Sie auf den Folien.

Inhaltsverzeichnis

1 Das vereinfachte Grundmodell

1.1 Überblick

Im Model gibt es zwei Akteure – Haushalte und Unternehmen:

- Die Unternehmen maximieren ihre Gewinne (Erlöse PY abzüglich Kosten WL)

  $$\Pi = PY - WL$$

  unter der Nebenbedingung (Produktionsfunktion)

  $$Y = AL. \tag{PF}$$

  Die Produktionfunktion wird auf den Folien mit (PF) bezeichnet. Aus den Bedingungen erster Ordnung erhalten wir:

  - das Güterangebot Y^A
  - die Arbeitsnachfrage L^N

  wobei ein hochgestelltes A indiziert, dass es sich um eine Angebotsfunktion handelt; ein hochgestelltes N markiert entsprechend die Nachfrage.

- Haushalte maximieren ihren Nutzen

  $$u = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2 \text{ mit } \sigma > 0 \text{ und } L > 0$$

  unter der Nebenbedingung (Budgetbedingung)

  $$PC = WL + \Pi,$$

  wobei Π die Gewinne sind. Aus den Bedingungen erster Ordnung erhalten wir:

  - Güternachfrage: $C^N = Y^N$
  - Arbeitsangebot: L^A

  In der Literatur ist es üblich das Konsumgut mit C und den Output mit Y zu bezeichnen. Hier in diesem Modell gilt $C = Y$. Der auf Unternehmensseite produzierte Output wird also vollständig auf der Haushaltsseite konsumiert. In einem Modell mit Kapital, Investitionen (I) oder Staatsausgaben, würden Konsum und Output jedoch nicht zusammenfallen ($C \neq Y$), da der Output zwischen Konsum und den anderen Variablen aufgeteilt werden müsste. Mit Investitionen hätten wir zum Beispiel $C + I = Y$. Ein Modell mit Kapital werden wir später in der Vorlesung genauer betrachten.

- Wir lösen diese Maximierungsprobleme für einen repräsentativen Haushalt und eine repräsentative Unternehmung. Jedoch unterstellen wir, dass es viele Haushalte und viele Unternehmen gibt. Alle Akteure sind Preisnehmer und haben keine Marktmacht.

1.2 Das Problem der Unternehmung

Die Unternehmung maximiert Gewinne (Erlöse minus Kosten)

$$\Pi = PY - WL$$

unter der Nebenbedingung, dass $Y = AL$. Einsetzen gibt

$$\Pi = PY - \frac{W}{A}Y$$
$$\frac{d\Pi}{dY} = P - \frac{W}{A} = 0 \to A = \frac{W}{P}. \tag{1}$$

Die Grenzerträge, bzw. das Grenzprodukt von Arbeit GP, sind konstant (hängen also nicht von anderen Variablen ab), d.h. egal wie viel Arbeit eine Firma einstellt, die letzte Stunde Arbeit produziert so viel wie die erste:

$$GP = \frac{\partial Y}{\partial L} = A.$$

Solange also die letzte eingestellte Stunde Arbeit mehr einbringt (Grenzprodukt mal Preis der Güter) als sie kostet (W), stellt die Firma Leute ein: $AP > W$ oder $A > W/P$. Im umgekehrten Fall entlässt sie Angestellte. Da P sowie W von der Firma als gegeben gesehen werden (es gibt viele Firmen und Haushalte, die Firma ist Preisnehmerin), ist die **Arbeitsnachfrage** also vollkommen elastisch (im allgemeinen Gleichgewicht wird sich der Reallohn W/P so einpendeln, dass $A = W/P$ erfüllt ist). Damit ist die Arbeitsnachfragekurve horizontal (siehe unten)

$$\frac{W}{P} = A. \tag{2}$$

Die **Grenzkosten** GK sind ebenfalls konstant. Dies sind die Kosten, um eine Einheit Output herzustellen, also die Kosten für eine Stunde Arbeit geteilt durch die Anzahl der Güter, die diese Stunde herstellt (die Anzahl der Güter, die diese Stunde herstellt ist das Grenzprodukt):

$$GK = \frac{W}{\partial Y/\partial L} = \frac{W}{A}. \tag{3}$$

Deswegen ist auch das **Güterangebot** vollkommen elastisch. Ist der Güterpreis über den konstanten Grenzkosten (die Firma bekommt also durch die letzte eingestellte Stunde Arbeit mehr Verkaufserlöse als dass sie kostet, unabhängig von der Produktionsmenge) würde die Firma unendlich viel herstellen wollen. Ist er unterhalb, würde die Firma die Produktion einstellen. Im allgemeinen Gleichgewicht pendelt sich der Preis auf die Grenzkosten ein ($P = W/A$ oder $W/P = A$, siehe oben) und die Unternehmen produzieren immer gerade so viel, dass sie die Nachfrage decken können.
Die **Gewinne** der Unternehmung sind (da $W/P = A$)

$$\begin{aligned}\Pi &= PY - WL \\ &= PAL - WL = (PA - W)\,L = 0.\end{aligned}$$

1.3 Das Problem des Haushalts

Kasten 1

Im Folgenden lösen wir das Problem mittels Lagrange, was jedoch nicht unbedingt notwendig ist. Wir könnten auch die Nebenbedingung direkt in die Zielfunktion einsetzen. Löst man die Nebenbedingung nach C, erhält man

$$C = \frac{WL + \Pi}{P}.$$

Einsetzen ergibt folgendes Maximierungsproblem:

$$\max_L u = \frac{\left(\frac{WL+\Pi}{P}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2.$$

Alternativ kann man die Nebenbedingung auch nach L lösen. Dann erhält man

$$\frac{PC - \Pi}{W} = L.$$

Einsetzen ergibt folgendes Maximierungsproblem:

$$\max_C u = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}\left(\frac{PC - \Pi}{W}\right)^2.$$

Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2 - \lambda\left(PC - WL - \Pi\right),$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda P = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -\Psi L + \lambda W = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = PC - WL - \Pi = 0.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen bekommen wir:

$$C^{-\sigma} = \Psi L \frac{P}{W}. \tag{AA}$$

Löst man die dritte Optimalitätsbedingung nach C erhält man:

$$C = \frac{W}{P}L + \frac{\Pi}{P}.$$

Einsetzen dieser Gleichung in (AA) gibt das **Arbeitsangebot**

$$\left(\frac{W}{P}L^A + \frac{\Pi}{P}\right)^{-\sigma} = \Psi L^A \frac{P}{W},$$

wobei wir hier L mit L^A ersetzt haben, um deutlich zu machen, dass es sich um eine Arbeitsangebotsfunktion handelt. Vereinfachen gibt

$$\frac{W}{P}L^A + \frac{\Pi}{P} = \Psi^{-\frac{1}{\sigma}} \left(L^A\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{P}{W}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \tag{4}$$

Mit $\Pi = 0$ (wie wir oben gesehen haben) vereinfacht sich die Arbeitsangebotsfunktion und wir können sie nach L^A auflösen:

$$L^A = \Psi^{-\frac{1}{\sigma+1}} \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+1}}.$$

Löst man die dritte Optimalitätsbedingung nach L erhält man:

$$\frac{P}{W}C - \frac{\Pi}{W} = L,$$

sodass die **Güternachfrage** implizit gegeben ist mit

$$\left(C^N\right)^{-\sigma} = \Psi \left(\frac{P}{W}C^N - \frac{\Pi}{W}\right)\frac{P}{W},$$

wobei wir C mit C^N ersetzt haben, um deutlich zu machen, dass es sich hier um eine Güternachfragefunktion handelt. Auch hier haben wir, dass

$$\frac{dC^N}{dP} < 0.$$

Da $\Pi = 0$ (siehe oben), lässt sich diese mit einer einfachen Ableitung zeigen. Auflösen von

$$\left(C^N\right)^{-\sigma} = \Psi \frac{P}{W}C^N \frac{P}{W}$$

nach C^N gibt

$$\left(C^N\right)^{-1-\sigma} = \Psi \left(\frac{P}{W}\right)^2,$$

vereinfachen gibt

$$C^N = \Psi^{\frac{1}{-1-\sigma}} \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{2}{1+\sigma}}.$$

Hier sieht man sofort, dass $\frac{dC^N}{dP} < 0$.

Kasten 2

In diesem Kasten betrachten wir den ersten Teil der Nutzenfunktion etwas näher, also den Ausdruck

$$\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}. \tag{A}$$

Der Parameter σ beeinflusst wie sich Preisveränderungen auf das Nachfrageverhalten des Haushalts auswirken. Dabei kann σ jeden positiven Wert annehmen. Von besonderer Bedeutung ist jedoch der Fall $\sigma = 1$.
Der Ausdruck $\frac{\sigma^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ ist für den Fall $\sigma = 1$ nicht definiert. In der Literatur findet man deswegen oft eine leicht abgeänderte Form:

$$\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, \tag{B}$$

wobei wir hier -1 im Zähler ergänzt haben. (Diese Ergänzung hat keinen Einfluss auf die Bedingungen erster Ordnung und daher keinen Einfluss auf das Verhalten der Haushalte. Deswegen gilt das Folgende auch für Funktionen ohne diese Ergänzung, da man sie ohne Weiteres so umschreiben kann.) Da in Gleichung (B) sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null gehen, wenn $\sigma \to 1$, können wir die Regel von L'Hospital anwenden. Diese besagt, dass unter bestimmten Bedingungen gilt, dass

$$\lim_{\sigma\to 1}\frac{f(\sigma)}{g(\sigma)} = \lim_{\sigma\to 1}\frac{f'(\sigma)}{g'(\sigma)}.$$

Zum einen muss gelten, dass der Ausdruck $\frac{f'(\sigma)}{g'(\sigma)}$ existiertiert und zum anderen darf man die Regel nur anwenden, wenn

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 1} f(\sigma) &= 0 \text{ oder } \pm\infty\\ \lim_{\sigma\to 1} g(\sigma) &= 0 \text{ oder } \pm\infty.\end{aligned}$$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned}\frac{f(\sigma)}{g(\sigma)} &= \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\\ f(\sigma) &= c^{1-\sigma}-1\\ g(\sigma) &= 1-\sigma.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 1} f(\sigma) &= 0\\ \lim_{\sigma\to 1} g(\sigma) &= 0,\end{aligned}$$

können wir die Regel anwenden. Wir haben:

$$\begin{aligned}f'(\sigma) &= c^{1-\sigma}(-1)\ln c\\ g'(\sigma) &= -1\end{aligned}$$

(hier haben wir verwendet, dass $\frac{df(x)}{dx} = z^x \ln z$) und somit

$$\lim_{\sigma\to 1} \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} = \lim_{\sigma\to 1} \frac{f(\sigma)}{g(\sigma)} = \lim_{\sigma\to 1} \frac{f'(\sigma)}{g'(\sigma)} = \lim_{\sigma\to 1} \frac{c^{1-\sigma}\ln c\,(-1)}{-1} = \ln c. \tag{5}$$

1.4 Marktgleichgewicht

Die Angebots- und Nachfragefunktionen der beiden Märkte Arbeitsmarkt und Gütermarkt haben wir im vorigen Abschnitt hergeleitet. Hier betrachten wir das Gleichgewicht, das sich ergibt, wenn das Angebot gleich der Nachfrage ist.

1.4.1 Arbeitsmarkt

Arbeitsnachfrage: vollkommen elastisch (horizontal), siehe Gleichung 2.
Arbeitsangebot:

$$L^A = \Psi^{-\frac{1}{\sigma+1}} \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma+1}}.$$

Der Parameter σ bestimmt das Verhältnis von Einkommenseffekt zu Substitutionseffekt. Betrachten wir die drei möglichen Fälle genauer:

1. $\sigma = 1 \to L^A = \Psi^{-1/2}$:

   (a) In diesem Fall ist das Arbeitsangebot vollkommen unelastisch (vollkommen unabhängig vom Reallohn). Der Einkommenseffekt einer Lohnerhöhung ist genauso groß (absolut gesehen) wie der Substitutionseffekt. Beide Effekte heben sich gegenseitig auf und eine Änderung des Reallohns hat keine Auswirkungen auf das Arbeitsangebot.

   (b) Wenn $\sigma = 1$, ist die Nutzenfunktion logarithmisch in C

   $$u(C, L) = \ln C - \Psi \frac{L^2}{2}.$$

   Dies haben wir mithilfe der Regel von L'Hospital gezeigt.

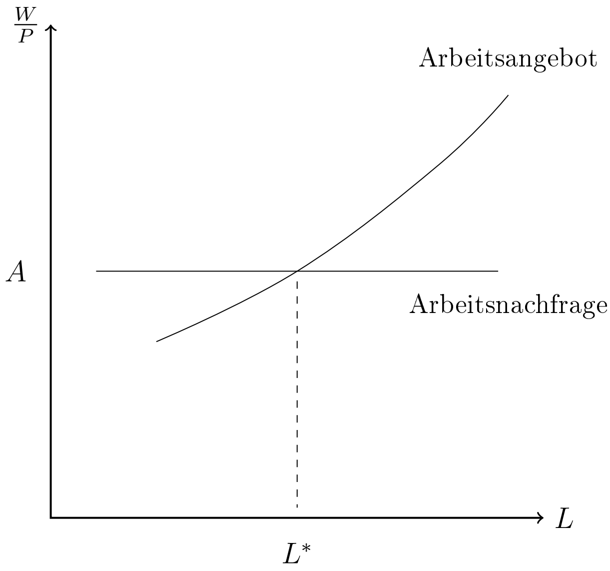
2. $\sigma > 1$: Hier überwiegt der Einkommenseffekt den Substitutionseffekt. Das Arbeitsangebot hat einen inversen Verlauf; die Steigung ist $dL^A/d\frac{W}{P} < 0$. Dies kann zu Instabilität am Arbeitsmarkt führen.

3. $\sigma < 1$: Hier überwiegt der Substitutionseffekt den Einkommenseffekt. Das Arbeitsangebot hat einen „normalen" Verlauf. Die Steigung ist $dL^A/d\frac{W}{P} > 0$; je höher der Lohn, desto höher das Angebot.

Das Gleichgewicht ist gegeben durch den Schnittpunkt von Arbeitsangebot und Arbeitsnachfrage. Der Reallohn ergibt sich als $W/P = A$. Die gleichgewichtige Anzahl an geleisteten Arbeitsstunden ergibt sich als

$$L^* = \Psi^{-\frac{1}{\sigma+1}} A^{\frac{1-\sigma}{\sigma+1}}.$$

Graphisch für $\sigma < 1$:

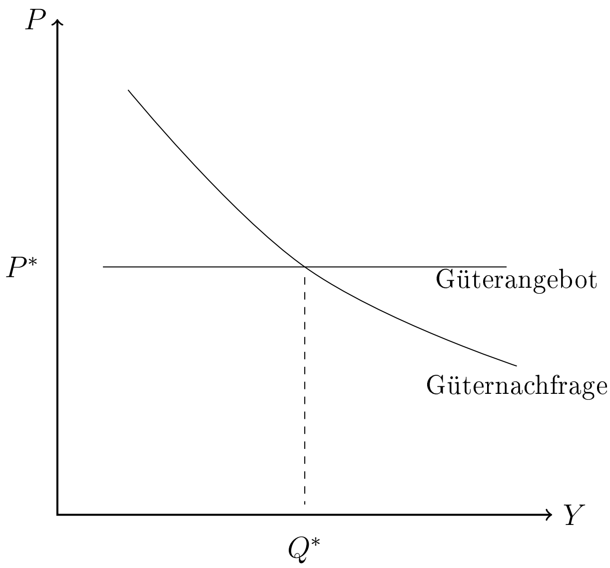


1.4.2 Gütermarkt

- Güterangebot: $\frac{dY^A}{dP} \to \infty$
- Güternachfrage: $\frac{dY^N}{dP} < 0$

Das Güterangebot ist vollkommen elastisch und damit horizontal. Die Güternachfrage haben wir oben hergeleitet als

$$C^N = Y^N = \Psi^{\frac{1}{-1-\sigma}} \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{2}{1+\sigma}}.$$



Im Gleichgewicht (wo sich Güterangebotskurve und Güternachfragekurve schneiden) haben wir

$$Y = \Psi^{\frac{1}{-1-\sigma}} \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{2}{1+\sigma}}.$$

1.4.3 Allokation

Im Gleichgewicht gilt:

$$C = Y \tag{6a}$$
$$Y = AL \tag{6b}$$
$$\frac{\Psi L}{C^{-\sigma}} = \frac{W}{P} = A. \tag{6c}$$

Die erste Gleichung nennt man auch die Resourcenbeschränkung der Ökonomie. Sie besagt, dass der Konsum nicht größer als die Produktion sein kann (weniger ist suboptimal bei der angenommenen Nutzenfunktion). Die zweite Gleichung ist die aggregierte Produktionsfunktion und sagt aus, dass der Output mit Hilfe von Arbeit produziert werden muss. Die letzte Gleichung besagt, dass im Marktgleichgewicht das Verhältnis des Grenznutzens aus Freizeit zum Grenznutzen von Konsum $\left(\frac{-\partial u/\partial L}{\partial u/\partial C}\right)$ gleich der Grenzrate der Transformation (d.h. dem Grenzprodukt von Arbeit: $\partial Y/\partial L = A$) ist. Letztere gibt hier an, mit welcher Rate eine Einheit des Gutes „Freizeit" (also negative Arbeit) durch den Produktionsprozess in das Gut Konsum transformiert werden kann.
In den obigen Gleichungen hat man vier Unbekannte $(C, Y, L, W/P)$ und vier Gleichungen (die letzte besteht ja aus zwei Gleichungen). Die anderen Variablen sind exogen gegeben (A) oder Parameter (Ψ). Von daher kann man für alle Variablen in Abhängigkeit von exogenen Variablen oder Parametern lösen.

1.5 Lösung des sozialen Planers

Der soziale Planer maximiert den Nutzen des Haushalts unter Berücksichtigung der technischen Machbarkeit (hier: Produktionsfunktion). Es gibt keine Märkte und somit auch keine Preise.

$$\mathcal{L} = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2 - \lambda\left(C - AL\right)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = C^{-\sigma} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -\Psi L + \lambda A = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C - AL = 0$$

Aus den ersten beiden Optimalitätsbedingungen erhalten wir

$$C^{-\sigma} = \frac{\Psi}{A}L$$

und aus der dritten Optimalitätsbedingung erhalten wir

$$C = AL.$$

Die Allokation des sozialen Planers ist somit identisch zu der Allokation zu der ein Marktgleichgewicht führt (siehe Gleichung 6).

2 Das Grundmodell

Hier betrachten wir einige Erweiterungen des vereinfachten Modells, wie sie auf den Folien zu finden sind. Zusammen ergeben sie das Grundmodell. Es wird weiterhin gelten, dass das Marktgleichgewicht und die Allokation, die ein sozialer Planer wählen würde, zusammenfallen und es keinen Grund für einen wirtschaftspolitischen Eingriff gibt.

2.1 CES Güterbündel

Hier nehmen wir an, dass das Konsumgut C ein Güterbündel darstellt und sich zusammensetzt aus den beiden Gütern Q und R mit dem Parameter $\gamma \leq 1$

$$C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} .$$

Wir folgen der Vorlesung und nehmen an, dass der Haushalt C selbst aus Q und R zusammenstellt. Damit haben wir jetzt zwei Unternehmen (die Q- und die R-Unternehmung) deren Produktionsfunktionen gegeben sind mit:

$$Y_i = AL_i \text{ mit } i = Q, R, \tag{PF}$$

wobei $Y_Q = Q$ und $Y_R = R$. Ebenso haben wir jetzt drei Märkte:

1. Arbeitsmarkt: Die Gesamtnachfrage setzt sich zusammen aus der Nachfrage der beiden Unternehmen
$$L = L_Q + L_R$$
2. Gütermarkt für Gut Q
3. Gütermarkt für Gut R

Da der Haushalt C selbst zusammensetzt, verschwindet der Markt für C beziehungsweise Y. Auf der Seite der Unternehmen ändert sich nichts Substantielles. Das Problem des Haushalts ist jetzt zweistufig. Die erste Stufe ist wie im vereinfachten Grundmodell.

- Erste Stufe des Maximierungsproblems der Haushalte
$$u = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2$$
unter der Nebenbedingung (Budgetbedingung)
$$PC = WL + \Pi,$$
wobei Π die Gewinne sind. Aus den Bedingungen erster Ordnung erhalten wir:
  - Die „Güternachfrage": C^N (da der Haushalt C selbst aus Q und R zusammenstellt, gibt es jedoch keinen Markt für C wie im vereinfachten Grundmodell aus Abschnitt 1).
  - Das Arbeitsangebot: L^A.
- In der zweiten Stufe des Maximierungsproblems minimiert der Haushalt die Ausgaben für Q und R unter der Nebenbedingung, dass $C = (Q^\gamma + R)^{\frac{1}{\gamma}}$

$$Ausgaben = QP_Q + RP_R$$
$$Nebenbedingung: C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Aus der zweiten Stufe erhalten wir die Güternachfragefunktionen für Q und R: Q^N und R^N. Setzt man diese beiden Nachfragefunktion in $C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ ein, erhält man eine Gleichung, die man als Angebotsfunktion für das Bündel C bezeichnen kann. Da der Haushalt, wie oben erwähnt, dieses Gut selbst zusammenbaut, gibt es strikt genommen keinen Markt für C. Man kann jedoch einen Preisindex P für dieses Bündel berechnen, sozusagen der Verbraucherpreisindex, wie er vom Statistischen Bundesamt erhoben wird.
Das Modell lässt sich jedoch auch anders interpretieren. Dies wird auf den Folien erwähnt. Bei dieser anderen Interpretation betrachtet man $C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ als Produktionsfunktion und nimmt an, dass Unternehmen C zusammenstellen und an den Haushalt verkaufen. Letztendlich ist dies nur eine andere Interpretation, das Gleichgewicht ist unverändert.

Kasten 3

Die Funktion
$$C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$$
ist eine sogenannte CES Funktion (constant elasticity of substitution). Dieser Name deutet an, dass die Substitutionselastizität zwischen Q und R konstant ist. In der Literatur werden Sie üblicherweise CES Funktionen mit mehr als zwei Gütern finden. Zum Beispiel

1. mit n Gütern (oder Güterarten):
   $C = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i^\gamma / n^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
2. mit einem Kontinuum von, d.h. unendlich vielen, Gütern (oder Güterarten):
   $C = \left(\int_0^1 Q_j^\gamma dj\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Das passende englische Wort für Güterart ist „variety". Egal welche Form man unterstellt, die Lösung des Maximierungsproblems folgt üblicherweise dem hier beschriebenen Vorgehen. Wir werden weiter unten nochmal auf die Version mit vielen Güterarten zurückkommen.
Auf den Folien steht, dass die Funktion $C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}$ konstante Skalenerträge und abnehmene Grenzerträge hat. Beide Eigenschaften lassen sich einfach zeigen:

1. Konstante Skalenerträge: Für eine Funktion f mit zwei Argumenten x und y, bedeuten konstante Skalenerträge dass
   $$f(zx, zy) = zf(x, y).$$
   Eine Verdoppelung der Inputfaktoren ($z = 2$) führt zu einer Verdoppelung des Outputs. Konstante Skalenerträge liegen vor, wenn f linear homogen ist (homogen vom Grad 1). Mathematisch: $f(zx, zy) = z^\phi f(x, y)$ mit dem Grad $\phi = 1$.

   Für unseren Fall multiplizieren wir zuerst die Inputfaktoren mit dem Faktor z:
   $$((zQ)^\gamma + (zR)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Ausklammern und vereinfachen ergibt:

$$z\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} = zC.$$

Es liegen somit konstante Skalenerträge vor.

2. Abnehmende Grenzerträge liegen vor, wenn die zweite Ableitung negativ ist.

$$\begin{aligned}
C &= \left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
\frac{\partial C}{\partial Q} &= \left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} Q^{\gamma-1} > 0 \\
\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-2} \gamma Q^{\gamma-1} Q^{\gamma-1} + \left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} (\gamma - 1)\, Q^{\gamma-2}
\end{aligned}$$

Zu überprüfen ist also $\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} < 0$?

$$\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-2} \gamma Q^{\gamma-1} Q^{\gamma-1} + \left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} (\gamma - 1)\, Q^{\gamma-2} < 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{-1} \gamma Q^\gamma < -(\gamma - 1) \\
\Leftrightarrow \quad & (1-\gamma)\, Q^\gamma < (1-\gamma)\left(Q^\gamma + R^\gamma\right) \\
\Leftrightarrow \quad & Q^\gamma < Q^\gamma + R^\gamma \checkmark
\end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck wahr ist, gilt $\frac{\partial^2 C}{\partial Q^2} < 0$. Somit haben wir abnehmende Grenzerträge.

Wir lösen das Problem mittels Lagrange:

$$\mathcal{L} = QP_Q + RP_R - \lambda\left(\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} - C\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} &= P_Q - \lambda \frac{1}{\gamma}\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \gamma Q^{\gamma-1} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} &= P_R - \lambda \frac{1}{\gamma}\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \gamma R^{\gamma-1} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} - C = 0.
\end{aligned}$$

Vereinfachen der ersten beiden Bedingungen erster Ordnung gibt:

$$P_Q = \lambda\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} Q^{\gamma-1} \tag{8}$$

$$P_R = \lambda\left(Q^\gamma + R^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} R^{\gamma-1}. \tag{9}$$

Mit der Definition des Bündels kann man folgendes schreiben:

$$C = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{10}$$
$$C^{1-\gamma} = (Q^\gamma + R^\gamma)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \tag{11}$$

Wenn man (11) in die Gleichungen (8) und (9) einsetzt, ergibt sich

$$P_Q = \lambda C^{1-\gamma} Q^{\gamma-1}$$
$$P_R = \lambda C^{1-\gamma} R^{\gamma-1},$$

oder

$$Q = \lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} P_Q^{\frac{1}{\gamma-1}} C \tag{12}$$
$$R = \lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} P_R^{\frac{1}{\gamma-1}} C. \tag{13}$$

Wir müssen also nur noch λ finden. Dafür setzen wir die letzten beiden Gleichungen in die Definition des Bündels (10) ein:

$$C = \left(\lambda^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} C^\gamma + \lambda^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} C^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$C = \lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} C$$
$$\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$\lambda = \left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{14}$$

An dieser Stelle führen wir die Definition des Preisindexes für das Güterbündel ein. Diese besagt, dass die Gesamtkonsumausgaben gleich dem Preisindex mal der Menge der Bündel ist

$$P_Q Q + P_R R \equiv PC.$$

Wenn man hier Gleichungen (12) und (13) einsetzt, erhält man

$$P_Q \lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} P_Q^{\frac{1}{\gamma-1}} C + P_R \lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} P_R^{\frac{1}{\gamma-1}} C = PC$$
$$\lambda^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) = P.$$

Hier kann man λ mit Gleichung (14) ersetzen:

$$\left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) = P$$
$$\left(P_Q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + P_R^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = P.$$

Dies ist also die Definition des Preisindexes und gleichzeitig auch derselbe Ausdruck wie für λ, siehe (14). Mathematisch ergibt dies Sinn: In dem Minimierungsproblem (7) haben wir die Gesamtausgaben minimiert unter der Nebenbedingung, dass wir mit den gekauften Q- und R-Gütern die Anzahl C an Konsumbündel formen können. Wie wir aus dem Handout auf moodle wissen, gibt der Lagrange Multiplikator an, um wie viel sich die Zielfunktion verändert, wenn man die Nebenbedingung marginal verändert. D.h. hier, wenn man ein weiteres Bündel kaufen will, verändern sich die Gesamtausgaben um den Preisindex. Da der Preisindex die Kosten für ein Bündel angibt, passt die Interpretation des Lagrange Multiplikators also auch ökonomisch. Für den Spezialfall, dass Q und R perfekte Komplemente sind ($\gamma \to -\infty$), wird der Preisindex zu

$$\lim_{\gamma\to\infty} P = P_Q + P_R.$$

Dies liegt daran, dass in diesem Fall die Konsumenten immer dieselbe Menge von beiden Gütern kaufen und somit der Preis des Konsumbündels gleich der Summe der Preise der Q- und R-Güter ist. Für den entgegengesetzten Spezialfall der perfekten Substitute ($\gamma \to 1$, wobei in den meisten anderen Formeln direkt $\gamma = 1$ eingesetzt werden kann) erhalten wir

$$\lim_{\gamma\to 1} P = \min(P_Q, P_R).$$

Der Preisindex entspricht also dem niedrigeren der beiden Preise. Konsumenten kaufen, da die Güter in diesem Fall beliebig austauschbar sind, nur das billigere. Der Preis eines Konsumbündels (bestehend aus einem Gut) entspricht dann dem Preis dieses Gutes.

Schließlich setzen wir $\lambda = P$ in Gleichungen (12) und (13) ein und kennzeichnen mit einem hochgestellten N, dass es sich um nachgefragte Mengen handelt:

$$\begin{aligned} Q^N &= \left(\frac{P_Q}{P}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} C \\ R^N &= \left(\frac{P_R}{P}\right)^{-\frac{1}{1-\gamma}} C. \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\varepsilon = 1/(1-\gamma)$ kann man dies folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} Q^N &= \left(\frac{P_Q}{P}\right)^{-\varepsilon} C \\ R^N &= \left(\frac{P_R}{P}\right)^{-\varepsilon} C. \end{aligned} \tag{GN'}$$

Dies sind die Nachfragefunktionen des Haushalts nach Q und R. Die Nachfrage nach Q (analog für R) ist eine Funktion von

- C: der Nachfrage nach C,
- P_Q: dem Preis von Q,
- P: Dem Preisindex des Bündels, also sozusagen dem Verbraucherpreisindex. Dieser geht hier ein, da er die Preise der Konkurrenzprodukte beinhaltet.

Im Übrigen sind die Herleitungen, um zu den Nachfragefunktionen zu kommen, nicht klausurrelevant...

Preiselastizität der Nachfrage: Die Preiselastizität der Nachfrage (prozentuale Veränderung der Nachfrage, wenn sich der Preis um 1% erhöht) lässt sich hier auf zwei Arten berechnen. Beide sind äquivalent (da $\frac{d \ln Q}{dP} = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP}$). Die Nachfragefunktion ist log-linear, sodass die erste Art etwas schneller ist. Logarithmieren (mit dem natürlichen Logarithmus) von

$$Q = \left(\frac{P_Q}{P}\right)^{-\varepsilon} C$$

gibt

$$\ln Q = -\varepsilon \ln P_Q + \varepsilon \ln P + \ln C.$$

Somit ergibt sich die Preiselastizität der Nachfrage als

$$\frac{d \ln Q}{d \ln P_Q} = -\varepsilon.$$

Alternativ kann man die Elastizität auch über die bekannte Formel $\frac{dQ/Q}{dP_Q/P_Q}$ berechnen. Ableiten von Q nach P_Q gibt (zur Konsistenz mit der Elastizitätsformel ausgedrückt in Änderungen und nicht als Ableitung, deswegen das Symbol d und nicht ∂)

$$\frac{dQ}{dP_Q} = \frac{dP_Q^{-\varepsilon} P^{\varepsilon} C}{dP_Q} = \frac{-\varepsilon P_Q^{-\varepsilon-1}}{P^{-\varepsilon}} C,$$

multiplizieren mit P/Q gibt

$$\frac{dQ/Q}{dP_Q/P_Q} = \frac{-\varepsilon P_Q^{-\varepsilon-1}}{P^{-\varepsilon}} C \times \frac{P_Q}{Q} = \frac{-\varepsilon P_Q^{-\varepsilon-1}}{P^{-\varepsilon}} C \times \frac{P_Q}{\left(\frac{P_Q}{P}\right)^{-\varepsilon} C} = -\varepsilon.$$

Für das Ergebnis ist es notwendig anzunehmen, dass das allgemeine Preisniveau P sich durch eine Veränderung von P_Q nicht verändert (also $dP/dP_Q = 0$). Dieses ist der Fall, wenn es unendlich viele verschiedene Güter gibt, statt nur Q und R. Falls es tatsächlich nur zwei Firmen gibt—also ein Oligopol—müsste man den Effekt der Preisänderung auf den Preisindex P mitberücksichtigen. Dies ignorieren wir hier zur Vereinfachung. In der Literatur werden ähnliche Modelle meistens tatsächlich mit unendlich vielen Gütern modelliert (siehe Kasten 3), was aber zum Teil kompliziertere Berechnungen erfordert. Aus pädagogischen Gründen bleiben wir also bei unseren zwei Gütern.
Da jetzt, außer bei $\varepsilon \to \infty$ die Nachfrage nicht mehr komplett wegbricht, wenn eine Firma ihren Preis um einen Cent über den der Konkurrenten setzt, verlassen wir hier den perfekten Wettbewerb. Trotzdem verliert die Firma Nachfrage an die Konkurrenz, wenn sie ihren Preis erhöht. Diese Situation nennt man **monopolistischen Wettbewerb**.

2.2 Abnehmende Skalenerträge: $\mathbf{Y_i = AL_i^{\alpha}}$

Wenn $0 < \alpha < 1$ hat die Produktionsfunktion abnehmende Skalenerträge. Damit ändert sich das Problem der Unternehmung. Das Maximierungsproblem der Unternehmung Q und der Unternehmung R sind identisch. Bei der Herleitung unten gilt wieder $Y_i = Q$ (für $i = Q$) oder $Y_i = R$ (für $i = R$).

- Zielfunktion ist die Gewinnfunktion:

$$\Pi_i = P_i Y_i - W L_i.$$

- Nebenbedingung ist die Produktionsfunktion:

$$Y_i = A L_i^\alpha. \tag{PF}$$

Wir lösen das Problem mittels Lagrange:

$$\begin{aligned}
&\max_{L_i, Y_i} P_i Y_i - W L_i - \lambda \left(Y_i - A L_i^\alpha\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_i} &= -W + \lambda A \alpha L_i^{\alpha-1} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_i} &= P_i - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= Y_i - A L_i^\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Teilt man die erste (umgestellte) Optimalitätsbedingung durch die zweite, erhält man

$$\frac{W}{P_i} = A \alpha L_i^{\alpha-1} = \alpha \frac{Y_i}{L_i}. \tag{AN}$$

Die letzte Gleichung ist die Arbeitsnachfrage (AN).

Kasten 4

Alternativ, ohne Lagrange:

$$\begin{aligned}
\max_{L_i} P_i Y_i - W L_i &= \max_{L_i} P_i A L_i^\alpha - W L_i \\
&\to P_i A \alpha L_i^\alpha - W = 0...
\end{aligned}$$

Die Begriffe Kosten, Grenzkosten und Grenzprodukt werden auf den Folien erwähnt. Die Grenzkosten wurden in Gleichung (3) allgemein definiert. Es gilt

- Gesamtkosten: $W L_i$,
- Grenzprodukt: $\frac{dY_i}{dL_i} = \alpha A L_i^{\alpha-1} = \alpha \frac{Y_i}{L_i}$,
- Grenzkosten: $\frac{W}{\alpha Y_i / L_i} = \frac{W L_i}{\alpha Y_i}$.

Bei abnehmenden Skalenerträgen sind die Gewinne der Unternehmung positiv, was unter Verwendung von Gleichung (AN) gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= P_i Y_i - W L_i \\
&= (1 - \alpha) P_i Y_i > 0.
\end{aligned}$$

2.3 Staat

In diesem Abschnitt führen wir den Staat als weiteren Akteur ein. Wir folgen den Folien und nehmen an, dass der Staat Steuern erhebt und wie der Haushalt die Güter Q und R nachfragt. Wir unterstellen einen ausgeglichenen Staatshaushalt.

- Der Staat erhebt eine Pauschalsteuer (englisch lump-sum tax). Damit ändert sich die Budgetbedingung des Haushalts zu

$$PC + T = WL + \Pi, \tag{BB}$$

  wobei T die Steuer ist. Wenn T negativ ist, spricht man von Transfers.

- Ein ausgeglichener Staatshaushalt impliziert hier, dass

$$T = PG. \tag{SN}$$

  Dies ist die Staatsnachfrage (SN).

- Analog zum Problem des Haushalts, wird unterstellt, dass der Staat sein „Konsumgut” G selbst aus Q und R zusammenstellt. Wir müssen deswegen zwischen staatlicher und privater Nachfrage nach Q und R unterscheiden:

$$\begin{aligned} C &= \left(Q_p^\gamma + R_p^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ G &= \left(Q_g^\gamma + R_g^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

  wobei der Index p für private und der Index g für die staatliche Nachfrage steht.

- Damit ergibt sich die Gesamtnachfrage als

$$C + G = \left(Q_p^\gamma + R_p^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(Q_g^\gamma + R_g^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{15}$$

2.4 Arbeitsmarkt und Gütermärkte

Wir folgen hier den Folien und unterstellen, dass $\gamma = 1$. Damit sind die Güter Q und R vollkommene Substitute. An sich wäre es möglich, an dieser Stelle nur von einem Gut zu sprechen und nicht mehr Q und R zu unterscheiden. Den 2-Güter-Fall brauchen wir jedoch in späteren Teilen der Vorlesung. Bei perfekten Substituten kann keine Firma Preise über denen der Konkurrentinnen setzen, da sie sonst die komplette Nachfrage verlieren würde (weil die Preise gleich den Grenzkosten sind, wird sie auch keine Preis darunter setzen). D.h. $P_Q = P_R = P$. Zudem geben bei $\gamma = 1$ beide Güter denselben Nutzen (perfekte Substitute). Für diesen Fall nehmen wir an, dass die Nachfrager von beiden Gütern gleichviel kaufen, sodass $R = Q$. Eingesetzt in Gleichung (15) ergibt dies:

$$\begin{aligned} C + G &= Q_p + R_p + Q_g + R_g \\ &= Q + R = 2Q. \end{aligned}$$

Also wissen wir, dass die Q-Unternehmung und die R-Unternehmung jeweils zur Hälfte die Gesamtnachfrage bedienen

$$Q = R = \frac{C + G}{2}. \tag{16}$$

Dementsprechend beschäftigen die Unternehmen jeweils das halbe Arbeitsangebot.

$$L_Q = L_R = \frac{1}{2}L.$$

Da die beiden Güter vollkommene Substitute sind, können sich ihre Preise auch nicht mehr unterscheiden und es gilt

$$P_Q = P_R = P,$$

wobei P wieder das allgemeine Preisniveau ist.

2.4.1 Der Arbeitsmarkt

Die Gleichungen (AA) und (AN), die wir oben gefunden haben, bezeichnen die Bedingungen erster Ordnung bezüglich des Arbeitsangebots und der Arbeitsnachfrage des erweiterten Modells und entsprechen den Gleichungen auf den Folien:

$$\frac{W}{P}C^{-\sigma} = \Psi L^A \tag{AA}$$
$$\rightarrow L^A = \frac{W}{P}\frac{C^{-\sigma}}{\Psi}$$

und Arbeitsnachfrage einer Firma

$$\frac{W}{P_i} = \alpha\frac{Y_i}{L_i^N}, \qquad i = Q, R. \tag{AN}$$

Um wieder deutlich zu machen, dass (AA) eine Angebot und (AN) eine Nachfrage beschreibt, haben wir wieder die Variable L um ein hochgestelltes A beziehungsweise um ein hochgestelltes N ergänzt.
Mithilfe der oben gemachten Annahmen, dass jede der beiden Unternehmen die Hälfte der nachgefragten Menge produziert ($Y_i = \frac{C+G}{2} = Y/2$ und damit $L_i = L/2$), sowie dem Ergebnis, dass $P_Q = P_R = P$ können wir die Nachfrage (AN) schreiben als:

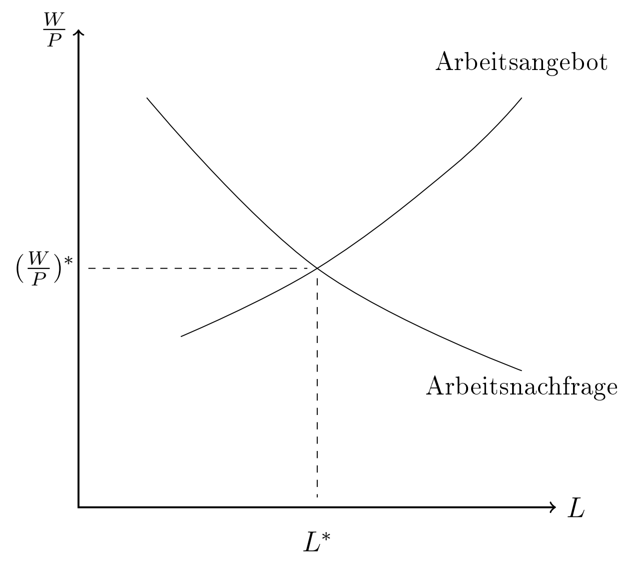
$$\frac{W}{P} = \alpha\frac{Y}{L^N}$$
$$\rightarrow L^N = \alpha Y\frac{P}{W}.$$

Im Gleichgewicht muss gelten:

$$L^N = L^A = L.$$

Die partiellen Ableitungen des Arbeitsangebot (allerdings noch ohne den eingesetzten Konsum) und der Arbeitsnachfrage nach dem Reallohn haben die üblichen Steigungen

$$\frac{dL^A}{d\frac{W}{P}} > 0$$
$$\frac{dL^N}{d\frac{W}{P}} < 0.$$



2.4.2 Der Gütermarkt

In diesem erweiterten Modell haben wir zwei Gütermärkte, einen Markt für Q und einen Markt für R. Wegen der Symmetrie des Modells reicht es, wenn wir uns einen der beiden Märkte anschauen. Hier betrachten wir den Markt für Q. Gleichung (GN') auf Seite 14 ist die private Nachfrage nach Q ohne Berücksichtigung der Staates. Addiert man, dass der Staat ebenfalls Q nachfragt und ergänzen wir Q mit einem hochgestellten N um klarzustellen, dass es sich um nachgefragte Mengen handelt, haben wir

$$Q^N = \left(\frac{P_Q}{P}\right)^{-\varepsilon} (C + G). \tag{GN}$$

Allerdings haben wir hier angenommen, dass $\gamma = 1$, d.h. $\varepsilon = 1/(1 - \gamma) \to \infty$, und somit auch $P_Q = P_R = P$. Der Term P_Q/P konvergiert also gegen eins, während der Exponent $-\varepsilon$ gegen minus unendlich läuft. Wohin dann der Term $(P_Q/P)^{-\varepsilon}$ konvergiert ist nicht ganz einfach, wir können uns aber behelfen. Und zwar wissen wir von Gleichung (16), dass in diesem Fall $Q = (C + G)/2$. Als Nachfrage ergibt sich

$$Q^N = Q_g^N + Q_p^N = \frac{C + G}{2}.$$

Da wir die Substitutionselastizität durch $\gamma = 1$ aber auf unendlich gesetzt haben, ist die Güternachfrage vollkommen elastisch. Dies sieht man, wenn man die Güternachfrage (GN) nach P_Q ableitet und dann $\gamma = 1$ einsetzt:

$$\frac{dQ^N}{dP_Q} = -\infty.$$

Bei einer minimalen Preiserhöhung der Q- oder der R-Firma wechseln alle Nachfrager zur jeweils anderen Firma (falls dies ihre Preise nicht erhöht hat).

Das Güterangebot ergibt sich aus der Arbeitsnachfrage und der Produktionsfunktion

$$\frac{W}{P_i} = \alpha \frac{Y_i}{L_i} \tag{AN}$$

$$Y_i = AL_i^{\alpha} \tag{PF}$$

als

$$Y_i = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} W^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} P_Q^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Betrachten wir auch hier stellvertretend das Gut Q und ergänzen wir Q mit einem hochgestellten A um zu kennzeichnen, dass es sich um eine Güterangebotsfunktion handelt, erhalten wir

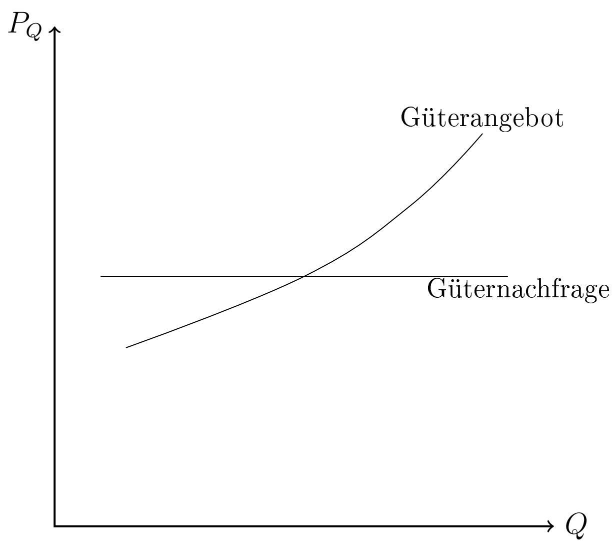
$$Q^A = \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A^{\frac{1}{1-\alpha}} W^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} P_Q^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{GA}$$

Das Güterangebot hat die übliche Steigung mit

$$\frac{dQ^A}{dP_Q} > 0.$$

Im Gleichgewicht muss gelten, dass Angebot gleich Nachfrage:

$$Q^A = Q^N = Q.$$



2.5 Marktgleichgewicht

Wie schon im vereinfachten Grundmodell werden wir die Allokation, die sich aus dem Marktmechanismus ergibt, mit der Allokation vergleichen, die ein sozialer Planer wählen würde. Es gilt weiterhin $\gamma = 1$. Die Güter Q und R sind somit vollkommen substituierbar.
Auflösen der Gleichungen (AA) und (AN)

$$C^{-\sigma} = \Psi L^A \frac{P}{W} \tag{AA}$$

$$L^N = L_Q^N + L_R^N = \alpha \frac{P}{W} (Q + R) \tag{AN}$$

(im Gleichgewicht ist $P_i = P$ und $L_i = L/2$ aufgrund der Symmetrie zwischen Q und R) nach W/P und gleichsetzen ergibt

$$C^\sigma \Psi L = \alpha \frac{Q+R}{L} = \alpha \frac{C+G}{L}. \tag{17}$$

Die Resourcenbeschränkung lässt sich mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(BB) : PC + T = WL + \Pi \\
&(PF) : Y_i = AL_i^\alpha \\
&(SN) : PG = T \\
&(PR) : \Pi_i = P_i Y_i - WL_i = (1-\alpha) P_i Y_i
\end{aligned}$$

herleiten. Umschreiben von (BB) mit Hilfe von (SN) gibt

$$\begin{aligned}
PC + T &= WL + \Pi \\
C + \frac{T}{P} &= \frac{W}{P} L + \frac{\Pi}{P} \\
C + G &= \frac{W}{P} L + \frac{\Pi}{P}.
\end{aligned}$$

Mit (PR) und da $L = L_Q + L_R$ können wir die letzte Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned}
C + G &= \frac{W}{P} (L_R + L_Q) + \frac{\Pi_Q + \Pi_R}{P} \\
&= \frac{W}{P} (L_R + L_Q) + \frac{P_R R - WL_R}{P} + \frac{P_Q Q - WL_Q}{P} \\
&= \frac{P_R R}{P} + \frac{P_Q Q}{P} = R + Q = AL_Q^\alpha + AL_R^\alpha,
\end{aligned}$$

da im Gleichgewicht $P_R = P_Q = P$. Deswegen ist, unter Berücksichtigung der Symmetrie von Q und R und somit $L_i = L/2$,

$$C + G = AL_Q^\alpha + AL_R^\alpha = 2A \left(\frac{L}{2}\right)^\alpha. \tag{18}$$

Dies ist auch die Resourcenbeschränkung der Ökonomie. Zusammen mit (17) ergibt sich

$$C^\sigma \Psi L = \alpha \frac{AL_Q^\alpha + AL_R^\alpha}{L} = \alpha \frac{2A(L/2)^\alpha}{L}. \tag{19}$$

2.6 Lösung des sozialen Planers

Wir folgen hier den Folien und setzen zur Vereinfachung $\alpha = 1$, zusätzlich zu $\gamma = 1$. Die Zielfunktion des sozialen Planers ist

$$\frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2,$$

mit der Nebenbedingung

$$C + G = AL.$$

Das Lagrange Problem ist dementsprechend

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L^2 - \lambda\left(C + G - AL\right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} &= C^{-\sigma} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= -\Psi L + \lambda A = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= C + G - AL = 0.
\end{aligned}$$

Vereinfachen gibt:

$$C + G = AL \quad \text{und} \quad \Psi L = C^{-\sigma} A.$$

Diese Allokation entspricht wieder der Marktallokation (mit $\alpha = 1$) aus dem vorhergehenden Abschnitt, siehe Gleichungen (18) und (19).

2.6.1 Unterschiedliche Haushalte

Die Folien unterscheiden zwischen zwei Arten von Haushalten (a und b). Im Problem des sozialen Planers werden die Nutzen dieser beiden Haushalte gewichtet. Die Resourcenbeschränkung ist dann, wieder mit $\alpha = 1$,

$$C + G = C_a + C_b + \frac{T_a + T_b}{P} = A\left(L_a + L_b\right) = AL,$$

und die zu maximierende Zielfunktion

$$\left(\frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_a^2\right) + \varrho\left(\frac{C_b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_b^2\right),$$

wobei ϱ die Nutzen gewichtet. Wir lösen das Problem mit Lagrange:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{C_a^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_a^2\right) + \varrho\left(\frac{C_b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{\Psi}{2}L_b^2\right) - \lambda\left(C_a + C_b + \frac{T_a + T_b}{P} - A\left(L_a + L_b\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_a} &= C_a^{1-\sigma} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_b} &= \varrho C_b^{1-\sigma} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_a} &= -\Psi L_a + \lambda A = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_b} &= -\Psi L_b + \lambda A = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= C_a + C_b + \frac{T_a + T_b}{P} - A\left(L_a + L_b\right) = 0.
\end{aligned}$$

Durch Auflösen der ersten beiden Gleichungen nach λ, einsetzen in die übrigen Gleichungen und Verwendung der Produktionsfunktionen sowie der Staatsnachfrage erhält man die Gleichungen auf den Folien:

$$C_j^\sigma \Psi L_j = A = \frac{Q}{L_Q} = \frac{R}{L_R} \qquad j = a, b \tag{A}$$

$$C_a + C_b = AL - \frac{T_a + T_b}{P}, \text{ mit (SN): } C + G = AL \tag{λ}$$

$$C_b^\sigma = \varrho C_a^\sigma. \tag{C}$$

Diese entsprechen dem Gleichgewicht, das sich auf den Märkten der dezentralen Lösung ergibt, bloß für zwei Konsumenten/Arbeiter und unter unserer Annahme, dass $\alpha = 1$. Dasselbe ergibt sich für die Aufteilung auf die Q- und R-Güter, wenn man diese ausrechnet.

2.7 Lösung des Grundmodells

Das Modell lösen bedeutet, einen Ausdruck für jede endogene Variabel (Y, L, C, W, P etc.) nur in Abhängigkeit von Parametern (α, σ, Ψ) und exogenen Variablen (A, G) herzuleiten. Wir setzen weiterhin $\gamma = 1$, lassen α aber unrestringiert. Hierzu kombinieren wir aus dem Marktgleichgewicht in Abschnitt 2.5 Gleichung (18) mit der Definition des BIPs $Y = C + G$, unter Berücksichtigung der Symmetrie der Q und R Güter und somit $L_i = L/2$, zu

$$Y = C + G = 2A\left(\frac{L}{2}\right)^\alpha \quad \Rightarrow \quad L = 2\left(\frac{Y}{2A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dies können wir dann mit Gleichung (17) aus dem Marktgleichgewicht und erneut $Y = C + G$ verbinden zu

$$\begin{aligned}
C^\sigma \Psi L &= \alpha \frac{C + G}{L} \\
(Y - G)^\sigma \Psi L^2 &= \alpha Y \\
(Y - G)^\sigma \Psi 4 \left(\frac{Y}{2A}\right)^{\frac{2}{\alpha}} &= \alpha Y \\
Y^{\frac{2}{\alpha} - 1}(Y - G)^\sigma &= \alpha \frac{(2A)^{\frac{2}{\alpha}}}{4\Psi}.
\end{aligned}$$

Die Lösung für Y ist also der Wert, der implizit durch folgende Gleichung bestimmt ist

$$Y^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}(Y-G)^{\sigma} = \alpha \frac{(2A)^{\frac{2}{\alpha}}}{4\Psi}.$$

In dieser Gleichung kommt Y als einzige endogene Variabel vor, wir können sie aber analytisch nicht weiter lösen (d.h. nach Y auflösen), weil es sich um ein Polynom in Y mit komplizierten Exponenten handelt. Allgemein gibt es ab hier drei mögliche Vorgehensweisen.

1. *Analyse von Spezialfällen.* Wir könnten z.B. den Fall $\sigma = \alpha = 1$ betrachten, da wir für diese Parameterkonstellation die Gleichung lösen können. Es ist dann allerdings immer fraglich, ob die so erzielten Ergebnisse auch für andere Parameterwerte halten.

2. *Lineare Approximierung.* Man kann die nichtlinearen Funktionen auf der linken und der rechten Seite der Gleichung linear approximieren, d.h. man leitet (lineare) Gleichungen für zwei Geraden her, die durch einen bestimmten Punkt dieser Funktionen gehen (man setzt also bestimmte Variablenwerte ein, um zu diesen bestimmten Punkt zu gelangen). Mit Hilfe dieser Geraden kann die so approximierte Gleichung analytisch gelöst werden. Diese Näherungen sind allerdings jeweils nur nah um den Approximationspunkt herum valide. Falls das System sich weiter von diesem Punkt weg bewegt, werden die Aussagen ungenauer.

3. *Numerische Lösungen.* Wenn man für die Paramter bestimmte Werte einsetzt, kann ein Computer diese Gleichung lösen. Man muss dann aber überprüfen, ob die so erlangten Aussagen auch für andere Parameterwerte zutreffen.

Für unsere Zwecke reicht zur Demonstration jedoch eine grobe Abschätzung der Effekte. Da $2-\alpha > 0$ und $\sigma > 0$, hängt die linke Seite positiv von Y und negativ von G ab. Weil $2/\alpha > 0$, hängt die rechte Seite positiv von A und negativ von dem Parameter Ψ ab.
Also hat eine verbesserte Technologie (höheres A) ceteris paribus eine positive Auswirkung auf das BIP Y, ebenso eine Staatsausgabenerhöhung (höheres G). Da Y allerdings einmal in $Y-G$ und nochmals positiv eingeht, ist bei letzteren allerdings erkennbar, dass eine Erhöhung von G um 1 Euro zu einer Stegierung des BIPs um weniger als einen Euro führt (da der Konsum negativ reagiert). Ein höheres Arbeitsleid Ψ führt hingegen zu einem geringeren BIP. Die Parameter α und σ bestimmen dabei die Stärke der erwähnten Zusammenhänge.
Wenn man erst einmal einen Wert für Y ermittelt hat, kann man für die restlichen endogenen Variabeln lösen, unter Beachtung der Symmetrie und mit Verwendung der Definition des BIPs, der Ressourcenbeschränkung (18), Gleichung (19) und Gleichung (AN) aus Abschnitt 2.5:

$$\begin{aligned} C &= Y - G \\ Q &= R = \frac{Y}{2} \\ L &= 2L_Q = 2L_R = 2\left(\frac{Y}{2A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ \frac{W}{P} &= \alpha \left(\frac{2}{Y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Eine kurze Anmerkung: der Reallohn hängt negativ vom BIP ab, falls A konstant bleibt, da das gleichgewichtige BIP in diesem Fall nur durch eine höhere Staatsnachfrage steigen kann. Diese geht aber einher mit einer höheren Besteuerung, so dass die Haushalte aufgrund des Einkommenseffekts mehr Arbeit anbieten, was die Löhne sinken lässt.